

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АРИΘΜΕΤΙΚΑ,

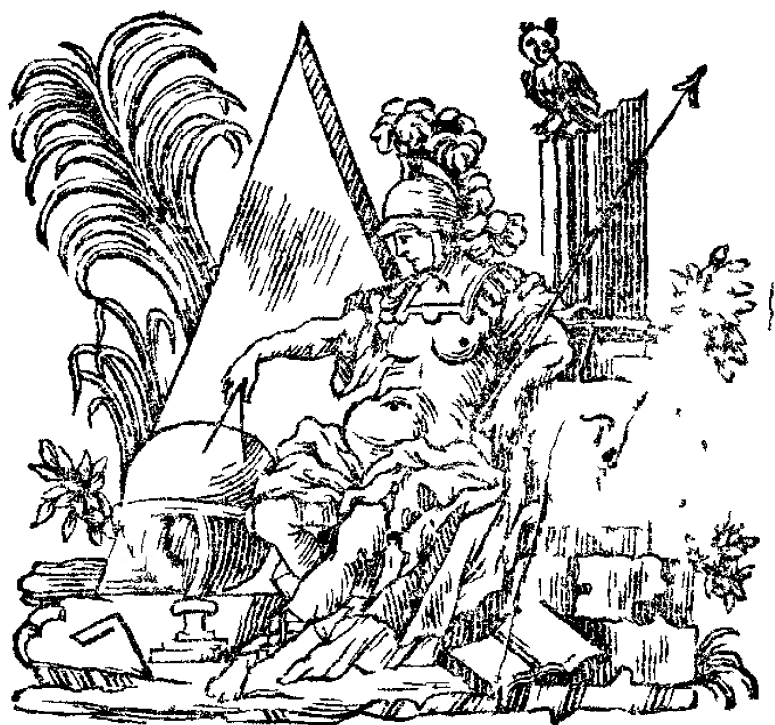
Г. Леонгарда Ейлера.

Переведенная съ нѣмецкаго подлинника
студентами Петромъ Иноходцовымъ
и Иваномъ Юдинымъ.



ТОМЪ ПЕРВЫЙ,

содержащій въ себѣ всѣ образы алгебра-
ического вычисленія.



при Императорской Академии Наукъ 1768 годѣ.

РОСПИСЬ МАТЕРІЯМЪ.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

О разныхъ родахъ исчисления простыхъ
количествъ.

ГЛАВА	I.	Въ которой разсуждается о ма- тематическихъ наукахъ во- обще — — — стр. 1.
— — —	II.	О изъясненіи знаковъ $+$ plus плюсъ и $-$ minus минусъ — 5.
— — —	III.	О умноженіи простыхъ коли- чествъ — — — 15
— — —	IV.	О свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ множителей — — — — — 22.
— — —	V.	О дѣленіи простыхъ количествъ — , — — — — 27.
— — —	VI.	О свойствѣ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ дѣлителей. — — — — — 35.
— — —	VII.	О дробяхъ вообще — — — 42.
— — —	VIII.	О свойствахъ дробей — — — 52.
— — —	IX.	О сложеніи и вычитаніи дро- бей — — — — — 58.

ГЛАВА X. О умноженіи и дѣленіи дробей

— — — — — 63.

— — — XI. О квадратныхъ числахъ — 72.

— — — XII. О квадратныхъ корняхъ и произ-
ходящихъ опшуда неизвле-
комыхъ числахъ — — — 77.

— — — XIII. О производящихъ изъ сегожъ ис-
точника невозможныхъ или
мнимыхъ числахъ — — — 88.

— — — XIV. О кубичныхъ числахъ — 96.

— — — XV. О кубичныхъ корняхъ и про-
изходящихъ опшуда неиз-
влекаемыхъ числахъ - - 99.

— — — XVI. О степеняхъ вообще — 105.

— — — XVII. О численіяхъ со степенями
— — — — — 113.

— — — XVIII. О корняхъ всѣхъ степеней
— — — — — 118.

— — — XIX. О извѣщеніи неизвлекаемыхъ
чиселъ, въ ломаныхъ пока-
зателяхъ — — — 122.

— — — XX. О разныхъ способахъ численія
и о ихъ связи вообще
— — — — — 129.

— XX.

ГЛАВА	XXI.	О логариѣмахъ вообще	137.
— —	XXII.	О употребительныхъ табли-	
		цахъ логариѣмовъ	— 144.
— —	XXIII.	О способъ представлять ло-	
		гариѣмы	— — 151.

Ч А С Т Ъ В Т О Р А Я

о разныхъ родахъ изчисленія составныхъ
количествъ.

ГЛАВА	I.	О сложении составныхъ коли-	
		чествъ	— — — 163.
— —	II.	О вычитаніи составныхъ ко-	
		личествъ	— — — 168.
— —	III.	О умноженіи составныхъ ко-	
		личествъ	— — — 171.
— —	IV.	О дѣленіи составныхъ коли-	
		чествъ	— — — 181.
— —	V.	О разрѣшеніи дробей на без-	
		конечные ряды	— 188.
— —	VI.	О квадратахъ составныхъ ко-	
		личествъ	— — — 201.
— —	VII.	О извлеченіи квадратныхъ ко-	
		рней въ составныхъ коли-	
		чествахъ	— — — 207.

ГЛАВА VIII.	О вычисленіи неизвлекаемыхъ чиселъ — — —	214.
IX.	О кубахъ и извлеченіи кубич- ныхъ корней — —	220.
X.	О степеняхъ составныхъ чи- селъ — — —	224.
XI.	О переложении буквъ, на чемъ доказательство преждедан- наго правила основано	235.
XII.	О разрѣшеніи неизвлекаемыхъ степеней на безконечные ряды — — —	243.
X.	О разрѣшеніи отрицательныхъ степеней — — —	249.

ЧАСТЬ ТРЕТІЯ

• содержаніи и пропорціи.

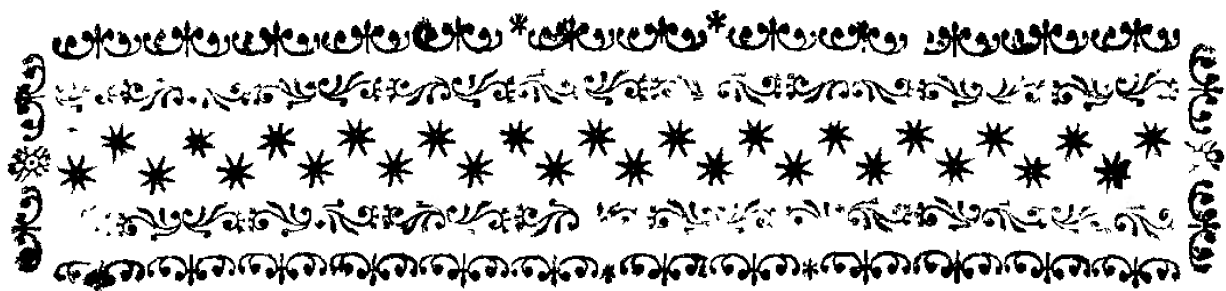
ГЛАВА I.	О содержаніи арифметическомъ, или разности двухъ чиселъ — — —	255.
II.	О арифметической пропорціи — — —	261.
III.	О прогрессіи арифметической — — —	267.
	IV.	

ГЛАВА	IV.	О нахожденіи суммы ариеме- тической прогрессіи —	275.
— —	V.	О Фигурныхъ или многоуголь- ныхъ числахъ — —	283.
— —	VI.	О содержаніи геометрическомъ — — — — —	293
— —	VII.	О большемъ общемъ дѣлителѣ двухъ данныхъ чиселъ	299
— —	VIII	О пропорціи геометрической — — — — —	306
— —	IX.	О извѣщеніи пропорціи	315
— —	X.	О сложныхъ содержаніяхъ	324
— —	XI.	О геометрическихъ прогрессіяхъ — — — — —	336
— —	XII.	О безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ — — — —	349
— —	XIII.	О вычисленіи интересовъ	359.

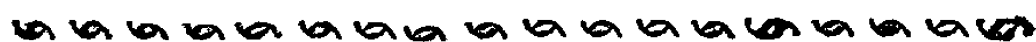
конецъ росписи.

ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	строки	напечатано	читая
58	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{2}$
—		$\frac{8}{3}$	$\frac{18}{3}$
61	9	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$
67	9	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{6}$
71	18	$+\frac{8}{15}$	$-\frac{8}{15}$
80	17	$\frac{8}{151}$	$\frac{121}{151}$
87	1	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
100	16	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$
101	20	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{8}$
104	7	$4\sqrt{a}$	$4\sqrt{a}$
109	17	понеже a	понеже a^1
111	8	$\frac{1}{a}$	$a^{\frac{1}{x}}$
—	18	$a1$ —	$13 1$ a
112	18	$aя$	$6я$
141	2	$—cd$	$—ld$
149	10	$34+4$	$3x+4$
177	21	ab	aab
181	0	простыхъ	составныхъ
187	13	$2a^3b^2$	$2a^3b$
194	3	$a\overline{=3}$	$a\overline{=}\frac{2}{3}$
212	15	$+b$	$+b^6$
225	17	$2a^2bb$	$3a^2bb$
227	15	$3aabbab^3$	$3aabb-ab^3$
233	9	6 той $\overline{=}\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}$	6 той $\overline{=}\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}$
244	12	$\sqrt[1]{a\overline{=}a4}$	$\sqrt[4]{a\overline{=}a\frac{1}{4}}$
262	12	— b	— p
321	17	ценнаго	цѣннаго.



ПЕРВАЯ ЧАСТЬ, о разныхъ родахъ исчисленія , простыхъ количествъ.



ГЛАВА I.

въ которой разсуждается о Маѳи-
матическихъ наукахъ вообще.

СТАТЬЯ I.

Вопервыхъ все что увеличиться или
уменьшиться можетъ , или къ чему
прибавить или убавить можно , назы-
вается *целичина* или *количество*.

По сему сумма денегъ есть коли-
чество , ибо къ оной придашь и отъ
оной убавишь можно.

2 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

Равнымъ образомъ и вѣсь и многія другія сему подобныя вещи величиною назваться могутъ.

2.

И такъ находяшся весьма многіе различные роды величинъ , коихъ всѣхъ удобно изчислить не можно : отсюда производятъ разныя части Маѳиматики , и въ каждой о особливомъ родѣ величины разсуждается ; ибо *Маѳиматика* обще есть наука о познаніи количествъ и изыскиванія средства къ измѣренію оныхъ.

3.

Но величину количества опредѣлить или вымѣрять инаго средства нѣтъ , какъ взявъ нѣкоторое количество такого же роду за извѣстное , изыскавъ его содержаніе къ мѣримому , которое и покажетъ , какъ одинакаго рода величины сослѣдствіе между собою. И такъ когда величина суммы денегъ опредѣлена быть долженствуешь , то возьми нѣкоторую
извѣ-

извѣстную деньгу какъ на примѣръ гульденъ, рейхспалеръ, рубль или червонецъ и сему подобное за извѣстное количество, по чему окажется, сколько разъ оная деньга въ помянутой суммѣ содержится.

Равнымъ образомъ когда величину какой нибудь тягосши опредѣлить должно, то возмѣ какую нисшь тягосшь на примѣръ фунтъ, центнеръ или лотъ и сему подобное, за извѣстное количество, и смотри сколько такихъ тягосшей содержится въ прежней.

А ежели длину или ширину вымѣрять должно, то обыкновенно употребляютъ къ тому извѣстную длину, которая футомъ называется.

4.

И такъ при опредѣленіи или вымѣриваніи величинъ всѣхъ родовъ, дѣло состоитъ въ томъ, чѣмъ въпервыхъ извѣстная величина одинакого рода съ мѣримою опредѣлена была, которая мѣ-

4 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

рою или единицею называется , и она слѣдовательно отъ нашего произволенія зависитъ ; по томъ чтобъ опредѣлено было , въ какомъ содержаніи помянутая величина съ сею мѣрою находится , что всегда числами означается ; по чему и число не иное что , какъ содержаніе одного количества къ другому , которое берется за единицу.

5.

Изъ сего явствуетъ , что всѣ величины выражаются чрезъ числа ; и такъ основаніе всей Маѳиматической науки въ томъ состоятъ должно , что бы знаніе о числахъ , и всѣ роды вычисленія , какія при томъ случиться могутъ , въ точное принятъ разсужденіе и оное разобрать обстоятельно.

Которая основательная часть Маѳиматики называется *Аналитика* или *Алгебра*.

6.

И такъ Аналитика объ однихъ токмо числахъ толкуетъ , по которымъ
означи-

означиваются величины , не принимая разные роды количествъ въ разсужденіе, какъ по видѣнью въ другихъ частяхъ Маѳиматики.

7.

О числахъ особливо толкуетъ Ариѳметика ; но она простирается токмо до извѣстныхъ родовъ исчисленія, которыя чаще въ общемъ житіи случаются ; напрошивъ того Аналитика вообще до всякаго роду , какой только при числахъ и исчисленіи оныхъ случиться можетъ.



ГЛАВА II.

Изъясненіе знаковъ $+$ plus *плюсъ* и $-$ minus *минусъ*, которые по Россійскій изобразить можно: чрезъ *съ* и *безъ*

8.

Когда къ одному числу придастся другое, или когда одно число съ другимъ сложится , то означается сіе помощію

А 2 знака

6 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

знака $+$ (plus) которой попереди числа ставится.

И такъ чрезъ $5+3$ означается то, что число 5 съ 3 сложено быть должно, отъ чего произойдетъ 8; равнымъ образомъ $12+7$ составляющъ, 19, $25+16$ дають 41 а $25+41$ есть 66 и проч.

9.

Посредствомъ сего знака $+$ plus можно соединить еще и больше чиселъ, какъ на примѣръ.

$7+5+9$ значитъ, что число 7 съ 5 и съ 9 сложено быть должно, что составляетъ 21; по чему разумѣется знаменованіе и слѣдующей формулы яко $8+5+13+11+1+3+10$ составляютъ 51.

10.

Сверхъ сего должно еще примѣчать, что обыкновенно сїи числа означиваются буквами, какъ а, в, с, d и проч. и такъ когда напишется $a+b$,
то

то сѣе означаетъ сумму обоихъ чиселъ, копорыя буквами а и в означены, сколь бы велики или малы они ни были; равнымъ образомъ $f + m + b + x$ значитъ сумму чиселъ изобразенныхъ сими буквами.

И такъ во всякомъ случаѣ, когда только извѣстно какія числа какими буквами означиваются, можно помощію числительной науки сыскать сумму или подлинное знаменованіе такихъ формулъ.

II.

Когда напрошивъ того отъ одного числа другое отпнѣтно быть должно или вычпено, то означивается сѣе знакомъ — (minus) копорой попереди ставится. Какъ наримѣръ $8 - 5$ показываетъ что отъ числа 8 отпнѣть должно 5, почему, какъ извѣстно, въ остаткѣ будетъ 3; равнымъ образомъ $12 - 7$ даетъ 5; а $20 - 14$ есть 6 и проч.

Можетъ также случиться, что изъ одного числа много чиселъ вмѣстѣ вычитаются, какъ нарим.

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9$$

что разумѣть должно слѣдующимъ образомъ : отними сперва отъ 50, и цу останется 49, отъсего числа паки 3, останется 46, отъ сего 5 останется 41, отъ сего 7 останется 34, отъ 34 отними послѣдніе 9 останется 25, которое показываетъ величину предложенной формулы. Но когда числа 1, 3, 5, 7, 9 и вмѣстѣ вдругъ отнимешь, то тоже выйдетъ, какъ будто бы сумма ихъ ш. е. 25 вдругъ отнята, ибо тоже что и прежде ш. е. 25 остается.

Равнымъ образомъ можно также легко сумму такой формулы назначить, въ которой много знаковъ + и - сойдется : какъ нарим.

$$12 - 3 - 5 + 2 - 1 \text{ даешъ } 5.$$

или можно особливо взявъ покло сумму пѣхъ чиселъ, которыя имѣютъ предъ собою знакъ $+$ какъ $12 + 2$ составляющъ 14, и когда отъ сего числа отнимется сумма всѣхъ чиселъ имѣющихъ предъ собою знакъ $-$; какъ то 3, 5, 1 сумма 9; то въ остаткѣ такъ какъ и прежде, будетъ 5.

14.

Изъ сего видно, что нѣтъ никакой силы въ порядкѣ, которымъ разсавлены числа; но можно оныя спавить по своей волѣ, лишъ бы только каждое число означенной свой знакъ предъ собою имѣло, такъ напр. вмѣсто прежней формулы поставивъ можно слѣдующую $12 + 2 - 5 - 3 - 1$ или $2 - 1 - 3 - 5 + 12$ или $2 + 12 - 3 - 1 - 5$. При чемъ примѣчать должно, что въ первой формулѣ предъ числомъ 12 поставленъ разумѣется знакъ $+$

15.

Когда же теперь, что бы по предложенному выше дѣлу дать общій разумъ,

А 5

зумъ,

10 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ .

зумѣ , вмѣсто дѣйствительныхъ чиселъ употребляясь буквы , то можно легко понять и знаменованіе оныхъ : на прим. $a - b - c + d - e$ показываетъ , что онѣ изображенныхъ литерами a и d чиселъ , прочія знакъ — имѣющія вмѣстѣ отнявъ должно.

16.

И такъ главное дѣло здѣсь состоитъ въ томъ , чтобъ знать какой знакъ каждое число предъ собой имѣетъ , по чему обыкновенно въ Алгебрѣ числа съ ихъ предстоящими знаками , какъ простые величины разсуждаются , и которыя имѣющъ предъ собою знакъ $+$ называются *прибыточныя* , или *положительныя* , которыя же знакъ $-$ *убыточныя* , или *отрицательныя*.

17.

Сіе весьма изрядно изъяснить можно имѣніемъ какого нибудь человѣка ; когда то , что онъ дѣйствительно у себя имѣетъ , означится числами съ знакомъ $+$ plus ; а то , чѣмъ онъ долженъ числами съ знакомъ $-$ minus.

такъ

Такъ когда кто нибудь имѣетъ у себя 100 рублей , а при томъ долженъ 50 ю рублями , то имѣніе его состоятъ будетъ изъ 100 — 50 , или что тоже изъ $+ 100 - 50$ т. е. 50.

18.

Когда убыточные взираются какъ долги , то о прибыточныхъ какъ о дѣйствительномъ имѣніи разсуждать должно ; по чему можно сказать , что убыточные числа суть менѣе, нежели ничего ; И такъ , когда кто никакого у себя имѣнія не имѣетъ, а при томъ еще 50ю рублями долженъ, то онъ дѣйствительно имѣетъ 50 руб. менѣе нежели ничего. По тому что , когда бы кто подарилъ ему 50 руб. чтобъ заплатилъ долгъ свой, то тогда не имѣлъ бы онъ ничего, хотя въ самомъ дѣлѣ и больше бы имѣлъ нежели прежде.

19.

Когда прибыточные числа дѣйствительно болѣе нежели ничего , то убыточные менѣе ничего ; но прибыточные

12 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

пачныя числа производятъ безпрестаннымъ къ 0 или къ ничему прибавленіемъ единицы ; отъ чего потомъ происходитъ рядъ или строка такъ названныхъ натуральныхъ чиселъ , какъ то $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ и такъ бесконечно. Такимъ же образомъ сей рядъ и назадъ продолжитъ можно безпрерывнымъ отниманіемъ отъ 0 единицы , отъ чего сей рядъ происходитъ ;

$0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10$
и такъ бесконечно.

20.

Всѣ сѣи числа какъ положительныя такъ и отрицательныя называются известнымъ именемъ *цѣлыми числами*, и отъ дробей и многихъ другихъ чиселъ , о которыхъ ниже сего предложено будетъ, отличаются. Такъ въ примѣрѣ 50 цѣлое число болѣе 49 ти, но легко можно понять, что между 49 ти и 50 ю еще бесконечно много среднихъ чиселъ счѣтать можешь, которыя всѣ больше 49 ти,

а

а менѣе 50 ши ; можно для сего въ примѣрѣ взять двѣ линѣи , изъ копорыхъ одна длиною въ 50 сажень , а другая въ 49 , то легко поймешь , что безконечно много другихъ линѣй повесишь можно , которыя всѣ долѣе 49 ши , а короче 50 сажень.

21.

Сіе понятіе о убыточныхъ величинахъ тѣмъ наипаче примѣчанія достойно , что оно во всей Алгебрѣ весьма важно : здѣсь довольно будетъ для примѣчанія , что въ сихъ формулахъ , какъ на прим. $+ 1 - 1$, $+ 2 - 2$, $+ 3 - 3$, $+ 4 - 4$ и такъ далѣе всѣ числа не иное что суть какъ 0 или ничего ; и что на прим. $+ 2 - 5$ не что иное какъ $- 3$, для того , что когда кто имѣетъ 2 рубля , а 5 ю рублями долженъ , то онъ не только не имѣетъ ничего , но еще 3 мя рублями остающа долженъ , такимъ же образомъ

$$\begin{array}{rcl} 7 - 12 & \text{равно} & - 5 \\ 25 - 40 & \text{—} & - 15 \end{array}$$

14 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

22.

Тоже самое наблюдаютъ должно, когда вмѣсто чиселъ возмущся литеры; ибо $+a-a$ всегда столько же соснавляется какъ и 0 или ничего; пошѣмъ ежели знать пожелаешь, что напр. $+a-b$ значитъ, то надлежитъ два случая принять въ разсужденіе.

1. Когда a больше нежели b , тогда b вычитаютъ изъ a , и остатокъ съ прибавочнымъ знакомъ взятой показываетъ искомое число.

2. Ежели a меньше b , то вычитаютъ a изъ b и остатокъ съ убыточнымъ знакомъ взятой, или знакъ minus — попереди соснавленъ, показываетъ искомое число.

~~~~~

## ГЛАВА III.

О умноженіи простыхъ количествъ.

23.

Когда 2 или болѣе равныхъ чиселъ сложатся вмѣстѣ, тогда сумма крайчайшимъ

чайшимъ образомъ выражается, какъ на-  
примѣръ :

$a + a$  равно 2 а

$a + a + a - - -$  3 а

$a + a + a + a - - -$  4 а и такъ далѣе,  
изъ чего поняшіе о умноженіи раждается  
а именно.

2. а не иное что какъ а взятое дважды.

3. а  $\text{—————}$  а взятое трижды.

4. а тоже что и а взятое чешыре-  
жды и такъ далѣе.

24.

И такъ когда литерою означенное  
число на другое какое число помножить  
должно , то число всегда пишется пе-  
редъ литерою , какъ на примѣръ.

а на 20 умноженное даетъ 20 а

б на 30 помноженное даетъ 30 б и пр.  
Такимъ образомъ с взятое однажды или  
одно с тоже что с.

25.

Такія произведенія можно еще и  
на другія числа множить, какъ на прим.

2 жды

## 16 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ -

2жды 3 а составляютъ 6 а

3жды 4 в дѣлаютъ 12 в

5ю 7 х дають 35 х , которыя  
еще далѣе на произволящія числа мно-  
жить можно.

### 26.

Когда то число , на которое по-  
множать должно , означено будетъ ли-  
терою, тогда непосредственно ставится  
оно попереди другой литеры; какъ на прим.  
Когда в умножить должно на а, то про-  
изведеніе будетъ ав , также р q есть  
произведеніе , которое происходитъ изъ  
умноженія числа q на р ; но ежели хо-  
чешь р q умножить еще на а , то про-  
изойдетъ ар q.

### 27.

При семъ примѣчать надлежитъ ;  
что здѣсь не требуется особливаго по-  
рядка въ постановленіи литеръ рядомъ;  
ибо ав тоже значитъ что и ва ; или  
в умноженное на а дѣлаетъ тоже что  
и а умноженное на в ; а чтобъ сіе по-  
нять яснѣе , то можно вмѣсто а и в  
взявъ

взять извѣстные числа , какъ 3 и 4 и тогда само собою видно будетъ , что 3жды 4 есть тоже что и 4жды 3.

28.

Когда вмѣсто литеръ , которыя непосредственно сряду написаны должно будетъ поставишь самыя числа , то легко видѣть можно , что оныя тогда непосредственно написать не лзя ; ибо когда бы вмѣсто 3жды 4 захопѣлъ написать 34 , то не было бы 12 но 34 , и такъ когда умноженіе простыхъ чиселъ означить должно , то обыкновенно ставится между оными точка , какъ на прим. 3 . 4 . значить 3жды 4 , 12 ; равнымъ образомъ 1 . 2 есть 2 , 1 . 2 . 3 есть 6 , 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 есть 720 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 будетъ 3628800 и такъ далѣе.

29.

Изъ сего явствуетъ , что значить сѣ изображеніе 5 . 7 . 8 . a . b . c . d , а именно: сперва 5 должно помножить на 7 , произведеніе на 8 , сихъ чиселъ произведеніе паки на a , сѣ новое на b , потомъ на

б

с ,

## 18 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

с , а на послѣдокъ на d. При чемъ примѣчать должно , что вмѣсто 5.7.8 писать самое можно произведеніе т. е. число 5 ю 7 , 35 и 8 ю 35 , 280.

30.

Еще примѣчать должно , что такія формулы , кошорыя отъ умноженія многихъ чиселъ производятъ называющіяся *произведеніями* ; а простыя числа или липеры обыкновенно именуются *множителями*.

31.

До сихъ поръ разсуждали мы только о числахъ положительныхъ или избыточныхъ , и нѣтъ сомнѣнія , чтобъ произшедшія отъ того произведенія не были положительныя же , напр  $+a$  умноженное на  $+b$  даетъ безъ сомнѣнія  $+ab$  ; а что произойдетъ , когда  $+a$  умножено будетъ на  $-b$  или  $-a$  на  $+b$  , оно требуетъ особливаго изъясненія.

32.

Умножимъ во первыхъ  $-a$  на 3 ,  
или на  $+3$  ; понеже  $-a$  за долгъ  
при-

принять можно, то извѣстно, что долгъ сей при раза взяпой, при раза и болѣе быть долженъ, слѣдовательно выдѣтъ искомое произведеніе —  $3a$ ; равнымъ образомъ когда —  $a$  на  $b$  т. е. на  $+$   $b$  помножено будетъ, то выдѣтъ —  $ba$ ; или что все тоже —  $ab$ . Изъ сего заключить можно, что когда положительныя величины помножены будутъ на отрицательныя: сирѣчь прибавочныя на убавочныя, то произведеніе будетъ убавочное; отсюда производишь слѣдующее правило:  $+$  умноженной на  $+$  даетъ  $+$ ; напрошивъ того  $+$  умноженной на  $-$ , или  $-$  на  $+$  даетъ  $-$ .

## 33.

Осталось теперь только упомянуть о слѣдующемъ случаѣ: когда — умноженъ будетъ на —, или —  $a$  на —  $b$ , при чемъ во первыхъ извѣстно, что произведеніе въ рассужденіи литеръ будетъ  $ab$ ; но должно ли къ тому придашь знакъ  $+$  или  $-$ , о томъ сказать не

Б 2

можно

## 20 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

можно , то только извѣстно , что одинъ изъ оныхъ знаковъ, или тотъ, или другой быть долженъ. Но теперь вопрошаю, не можетъ ли быть тупъ знакъ — ? понеже — а умноженное на  $+$  в даетъ —  $a b$  , слѣдовательно — а умноженное на  $-$  в не можетъ тоже дать , что даетъ — а на  $+$  в , но должно изъ того выйти противному , а именно  $+$   $a b$ . Изъ сего слѣдующее производитъ правило : — умноженной на — даетъ  $+$  подобно какъ и  $+$  умноженной на  $+$ .

### 34.

Сіи правила обыкновенно соединяются , и кратко сими словами выговариваются : два одинакіе знака умноженные между собою даютъ  $+$  , а два разные даютъ  $-$  ; такъ напримѣръ , когда сіи числа :  $+$   $a$ .  $-$   $b$ .  $-$   $c$ .  $+$   $d$  другъ на друга помножены будутъ , то впервыхъ  $+$   $a$ .  $-$   $b$  даетъ  $-$   $a b$  , сіе на  $-$   $c$  даетъ  $+$   $abc$  , наконецъ еще на  $d$  умноженное даетъ  $+$   $abcd$ .

35.

Понеже теперь въ рассужденіи знаковъ нѣтъ никакого затрудненія : то остается еще показать , какимъ образомъ два числа , которыя сами суть произведенія , помноживъ должно между собою ; когда а в помножено будетъ на с d , то произведеніе будетъ а в с d , и происходитъ оное , когда а в умножится на с и произведеніе на d ; или когда наприм. 36 на 12 умноживъ должно , и понеже 12 производящъ отъ умноженія 3 х в на 4 ; то надлежитъ только сперва 36 умножить тремя и произведеніе т. е. 108 четырьмя , такъ выйдетъ 432 равно 12. 36.

36.

А ежели бы кто захотѣлъ 5 а в умножить на 3 с d , то можетъ оное такъ поставить 3 с d. 5 а в ; но понеже здѣсь все равно , какимъ порядкомъ состоятъ умноженные между собою числа , то числа ставятъ , обыкновенно попереги и пишутъ вмѣсто того произве-



## 22 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

денія 5. 3  $abcd$  или 15  $abcd$ , потому что 5 умноженное на 3 равно 15. равнымъ образомъ когда 12  $pqr$  умножено будетъ на 7  $ху$ , то произведеніе будетъ 12. 7  $pqrху$  т. е. 84  $pqrху$ .



### ГЛАВА IV.

О СВОЙСТВѢ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЕЛЪ ВЪ РАССУЖДЕНІИ ИХЪ МНОЖИТЕЛЕЙ.

37.

Мы видѣли уже, что когда два или болѣе чиселъ между собою помножатся; оныя называются въ разсужденіи произведенія множителями, какъ на примѣръ: множители произведенія  $abcd$  суть  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

38.

Еслили теперь возьмемъ всѣ цѣлыя числа въ разсужденіе, поелику оныя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ производятъ, то потчасъ видно, что нѣкоторыя совсѣмъ не отъ умноженія производятъ, слѣвовашельно никакихъ

мно-

множителей не имѣютъ , а нѣкоторыя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ раждаются , слѣдовательно два или болѣе множителей имѣютъ , какъ на- прим. 4 равно 2. 2 , 6 равно 2. 3 , 8 равно 2. 2. 2 , 27 равно 3. 3. 3 , 10 равно 2. 5 и такъ далѣе.

39.

Напротивъ того слѣдующія числа 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 вышепоказан- нымъ образомъ во множителяхъ пред- ставить не можно , развѣ употребить къ тому и единицу ; наприм. 2 изобра- зить чрезъ 1. 2 ; но какъ единицею помноженное число не перемѣняется, то она и въ число множителей причтена быть не можетъ.

И такъ всѣ такія числа , кото- рыя множителей имѣть не могутъ, какъ то 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , и проч. называюпся *простыми* , *первыми* или *первоначальными* числами. Напротивъ того тѣ, которыя множителей имѣютъ, какъ :

## 24 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18  
называются *сложенными*.

40.

По сему *простыя* или *лерьпыя* числа особливаго вниманія достойны, для того что оныя отъ умноженія двухъ или болѣе чиселъ не производящъ. При чемъ особливо примѣчанія достойно сіе, что когда оныя въ рядъ поставлены будучъ по порядку, какъ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, и такъ далѣе, то въ разсужденіи оныхъ никакого порядка не видно, но распушъ по больше, по меньше, какъ кажется, безъ порядка. Ибо и по нынѣ еще не могли найши закона, по которому оныя возрастаютъ.

41.

Но сложные числа, которыя во множителяхъ представить можно, производящъ всѣ изъ вышепомянутыхъ простыхъ чиселъ, такъ что всѣ множители оныхъ суть простые числа; ибо  
когда

когда бы какой либо множитель былъ не-простое , но сложное число , то можно бы его представишь въ двухъ или болѣе множителяхъ , которые бы были простые числа , такъ когда число 30 представится чрезъ 5. 6 , то не 6 простое число будетъ , но 2. 3 слѣдовательно 30 можно изобразить чрезъ 5. 2. 3 или 2. 3. 5 гдѣ всѣ множители суть простые числа.

42.

Еслили теперь рассмотримъ всѣ сложные числа , то есть какимъ образомъ оныя чрезъ простые числа представляющ-ся , то найдемъ въ томъ великое различіе ; ибо нѣкоторыя имѣютъ только два такихъ множителя , иныя 3 а иныя 4 или болѣе , наприм. какъ уже видѣли :

|          |            |               |         |
|----------|------------|---------------|---------|
| 4 равны  | 2. 2 ;     | 6 равны       | 2. 3    |
| 8 - - -  | 2. 2. 2 ;  | 9 - - -       | 3. 3    |
| 10 - - - | 2. 5 ;     | 12 - - -      | 2. 3. 2 |
| 14 - - - | 2. 7 ;     | 15 - - -      | 3. 5    |
| 16 равны | 2. 2. 2. 2 | и такъ далѣе. |         |

## 26 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

43.

Изъ сего явствуемъ , какимъ образомъ каждого числа простыя множители находятся. На прим. предложено число 360 , то явствуемъ вопервыхъ , что оно состоитъ изъ 2. 180 , а сіе 180 равно - - - - - 2. 90 , сіе 90 равно - - - - - 2. 45 , сіе 45 равно - - - - - 3. 15 , наконецъ 15 равно - - - - - 3. 5 , слѣдовательно число 360 представляется въ слѣдующихъ простыхъ множителяхъ 2. 2. 2. 3. 3. 5 , которыя числа всѣ вмѣстѣ умноженные между собою , составляютъ 360.

44.

Изъ сего видно , что простыя числа ни на какія другія не дѣлятся , напрошивъ того сложныя наиспособно на ихъ простыхъ множителей разрѣшающіяся , когда сыщутся всѣ простыя числа , на которыя они раздѣлиться могутъ. Но къ сему потребно дѣленіе , о которомъ въ слѣдующей главѣ изъяснено будетъ.

Глава



## ГЛАВА V.

О дѣленіи простыхъ количествъ.

45.

Когда какое либо число раздѣлить должно на двѣ равныя части , на три или болѣе , то дѣлается оное помощію дѣленія , которое показывается , какимъ образомъ назначить величину такой части. Когда 12 раздѣлить должно на три равныя части , то найдешь помощію дѣленія , что та часть 4 будетъ.

Употребляють при томъ нѣкоторыя извѣстныя имена , и всякое число , которое дѣлится должно , называютъ *дѣлимый* числомъ , число такихъ частей , на какіе дѣлится *дѣлителемъ* , а величину всякой части , которая помощію дѣленія сыскана будетъ , *частнымъ* числомъ , какъ на примѣръ ;

12 *дѣлимое* число

3 *дѣлитель*

4 *частное* число.

## 46.

И такъ когда какое либо число раздѣлишь на 2, или на двѣ равныя части, то такая часть, т. е. частное число, дважды взятое прежде помянутое число неопмѣнно произвестъ должно; равнымъ образомъ, когда какое нибудь число раздѣлишь должно на 3, то частное число трижды взятое оное число произвестъ должно; и такъ вообще всегда должно выйти дѣлимому, когда частное число дѣлителемъ помножится.

## 47.

Чего ради и въ дѣленіи слѣдующее наблюдать должно: ищи для частнаго числа такое число, которое умноженно будучи дѣлителемъ даетъ точно дѣлимое число. Когда наприм. 35 раздѣлить должно на 5, то ищи такое число, которое помноженное 5 ю произведетъ 35; оное число есть 7, потому, что 5 ю 7, 35. Для сего обыкновенно употребляющъ слѣдующую рѣчь: 5 въ 35 содержится 7 разъ, потому, что 5 ю 7 есть 35.

Почему

48.

Почему дѣлимое можно взять за произведеніе, котораго одинъ множитель равенъ дѣлителю, а другой частному числу. И такъ, когда дано мнѣ 63 раздѣлить на 7, то ищу произведеніе, котораго одинъ множитель 7 помноженной на нѣкоторое другое число дастъ произведеніе 63, такое число есть 9, и потому 9 есть частное число, которое происходитъ отъ раздѣленія 63 на 7.

49.

Также когда  $a$   $b$  раздѣлить должно на  $a$ , то частное будетъ  $b$ , потому, что  $a$  умноженное на  $b$  составляетъ дѣлимое  $a b$ ; изъ сего видно, что когда  $a b$  раздѣлить должно на  $b$  частное число будетъ  $a$ .

И такъ вообще во всѣхъ примѣрахъ дѣленія, когда дѣлимое на частное число раздѣлился, дѣлителю выйти должно; наприм. когда 24 на 4 раздѣленное дастъ 6, то и обратно 24 на 6 раздѣленное дастъ 4.

Понеже



## 30 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

50.

Понеже все дѣло въ томъ состо-  
итъ , чтобъ представить себѣ дѣлимое ,  
какъ произведеніе въ двухъ множителяхъ  
состоящее , изъ которыхъ одинъ равенъ  
дѣлителю , а другой частному числу ,  
то и слѣдующіе примѣры легко разумѣть  
можно : яко число  $abc$  раздѣленное на  $a$   
дастъ  $bc$  , по тому , что  $a$  умноженное  
на  $bc$  составляетъ  $abc$  ; равнымъ обра-  
зомъ  $abc$  раздѣленное на  $b$  дастъ  $ac$  ;  
но  $abc$  на  $ac$  раздѣленное дастъ  $b$ . По-  
томъ  $12\ mп$  раздѣленные на  $3\ m$  дають  
 $4\ n$ . по тому , что  $3\ m$  умноженные  
на  $4\ n$  составляютъ  $12\ mп$  ; когда  
же самыя сіи числа  $12\ mп$  раздѣлены бу-  
дутъ на  $12$  , то произойдетъ  $mп$ .

51.

Понеже каждое число  $a$  чрезъ  $1$ . а  
или  $1\ a$  изобразить можно : то изъ сего  
видно , что когда  $a$  или  $1\ a$  на  $1$  раздѣ-  
лишь , то же самое  $a$  въ частномъ чи-  
слѣ выйдетъ ; напротивъ того , когда  
тожъ самое  $a$  или  $1\ a$  на  $a$  раздѣлишь ,  
частное число будетъ  $1$ .

Но

52.

Но не всегда случается, чѣмъ дѣлимое представишь можно было, какъ произведеніе въ двухъ множителяхъ состоящее, изъ которыхъ бы одинъ равенъ былъ дѣлителю, и въ такомъ случаѣ дѣленія такимъ образомъ дѣлать не можно: ибо когда на прим. 24 раздѣлить должно на 7, то 7 не есть множитель 24 хъ, пошому что 7. 3 дѣлаютъ 21 и слѣдовательно менѣе; на противъ того 7. 4 уже 28, слѣд. болѣе соспавляютъ. Однако видно изъ сего, что частному числу болѣе 3 хъ, а менѣе 4 хъ быть должно. Чего ради для точнаго опредѣленія онаго надлежитъ въ помощь взять числа дробями названныя, о которыхъ въ слѣдующей главѣ предложено будетъ.

53.

Между тѣмъ пока къ изъясненію дробей не приступимъ, довольно будетъ взять за частное самое ближайшее цѣлое число, замѣняя при томъ остатокъ яко въ семъ примѣрѣ: 7 въ 24 содержится 3 жды,

## 32 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

3жды , и останется 3 ; потому что 3жды 7 только 21 , чего ради 3 хѣ въ такомъ случаѣ мало ; равнымъ образомъ и слѣдующей примѣръ разумѣнь должно , какъ :

$$\begin{array}{r|l} 6 & 34 \\ \hline & 30 \\ \hline & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{то есть дѣлитель } 6 \\ \text{дѣлимое } 34 \\ \text{частное } 5 \\ \text{остатокъ } 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 41 \\ \hline & 36 \\ \hline & 5 \end{array}$$

въ такихъ примѣрахъ , гдѣ остатокъ есть , слѣдующее правило примѣчать надлежитъ.

54.

Вопервыхъ дѣлителя умножить должно частнымъ числомъ , потомъ къ произведенію приложить еще остатокъ , и произойдетъ дѣлимое число , симъ образомъ обыкновенно повѣряютъ дѣленіе , исправно ли оно здѣлано или нѣтъ.

И

И такъ въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ число 6 умноживъ 5 ю получишь 30, къ тому придай остатокъ 4 и выдешъ дѣлимое число 34. Тожъ самое и въ послѣднемъ: когда дѣлитель 9 помножится частнымъ 4 и къ произведенію 36 придася остатокъ 5, то произойдетъ дѣлимое 41.

55.

Напослѣдокъ въ разсужденіи знаковъ plus  $+$  и minus  $-$  еще сіе примѣчать должно: а имянно: само собою ясно, что когда  $+$  аб раздѣлено будетъ на  $+$  а, частное число будетъ  $+$  b; а когда  $+$  аб раздѣлено будетъ на  $-$  а, то въ частномъ числѣ будетъ  $-$  b, пошому что  $-$  а умноженное на  $-$  b даетъ  $+$  аб.

Когда же дѣлимое число есть  $-$  аб, и оно раздѣлено будетъ на дѣлителя  $+$  а, то частное число будетъ  $-$  b, пошому что  $+$  а на  $-$  b умноженное, даетъ  $-$  аб ш. е. дѣлимое число.

А естли наконецъ дѣлимое  $-$  аб раздѣлено будетъ на дѣлителя  $-$  а, то

В
частное

## 34 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

частное число будетъ  $\div b$ , потому что  $-a$  умноженное на  $\div b$  даетъ  $--ab$ .

56.

И такъ находимъ мы въ дѣленіи для знаковъ  $+$  и  $-$  тѣ же самыя правила, какія выше сего видѣли въ умноженіи, а именно:  $+$  раздѣленной на  $+$  даетъ  $+$ ;  $+$  раздѣленной на  $-$  даетъ  $-$ ;  $-$  раздѣленной на  $+$  даетъ  $-$ ;  $-$  раздѣленной на  $-$  даетъ  $+$  или короче одинакія знаки даютъ  $+$  plus а разные  $-$  minus.

57.

И по сему когда  $18pq$  раздѣлишь на  $-3r$ , то частное число будетъ  $-6q$ ;  $-30xy$  раздѣленное на  $-6y$  даетъ  $+5x$ ;  $-54abc$  раздѣленные на  $-9b$  даютъ  $+6ac$ ; потому что  $-9b$  умноживъ на  $6ac$  даетъ  $-6.9abc$  или  $-54abc$ ; чего для дѣленія простыхъ величинъ довольно будетъ. Отсюда къ изъясненію дробей поступимъ, упомянувъ напередъ мало о свойствахъ цѣлыхъ чиселъ въ разсужденіи ихъ дѣлителей.

Глава



## ГЛАВА VI.

О СВОЙСТВѢ ЦѢЛЫХЪ ЧИСЕЛЪ ВЪ РАЗСУЖДЕНІИ  
ИХЪ ДѢЛИТЕЛЕЙ.

58.

Видѣли уже мы , что иныя числа могутъ имѣть нѣкоторыхъ дѣлителей , а иныя нѣтъ , по для разпознанія чиселъ сіе различіе особливо примѣчать должно; и тѣ числа , которыя на какого либо дѣлителя раздѣлитъ можно , надлежитъ тщательнѣе оплечать отъ тѣхъ , которыя на оной раздѣлиться не могутъ : а припомѣ замѣчать остатокъ , которой при дѣленіи послѣднихъ будетъ. Чего ради возмемъ мы слѣдующихъ дѣлителей 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 и такъ далѣе въ разсужденіе.

Пусть будетъ во первыхъ дѣлитель 2 , то числа , которыя на онаго раздѣлитъ можно , суть слѣдующія : 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 и такъ далѣе, которыя всѣ 2мя возрастаютъ

## 36 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

и сїи числа вообще называются *четными числами*.

Напротивъ того пропчїя , какъ то : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 и такъ далѣе , которыя на 2 раздѣлишь. ся не могутъ , но въ остаткѣ 1 оста- вляютъ , называются *нечетными числами*. По чему таковое нечетное число всегда боль- ше или меньше четнаго единицею ; всѣ четныя числа можно заключить въ семъ общемъ изображеніи  $2a$  , потому что когда вмѣсто  $a$  поставятся по порядку одно послѣ другаго всѣ числа , 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и такъ далѣе , то прои- зойдутъ всѣ четныя числа ; напротивъ того въ слѣдующей формулѣ  $2a + 1$  всѣ нечетныя числа заключающіяся, потому что  $2a + 1$  единицею больше четнаго числа  $2a$

бо.

Вовторыхъ пусть дѣлитель будетъ 3 , то всѣ числа , которыя на 3 раздѣ- литься могутъ , суть слѣдующія :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 и такъ далѣе , которыя въ формулѣ  $3a$  пред- ста-

ставишь можно : ибо  $3a$  раздѣленное на  $3$  даетъ въ частномъ числѣ  $a$  безъ остатка ; прочія же числа, когда оныя на  $3$  раздѣлишь пожелаешь или  $1$  или  $2$  даютъ остатку , и такъ двоякаго суть рода ; тѣ , которыя  $1$  въ остаткѣ представляютъ суть слѣдующія :  $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$  и такъ далѣе , и заключающіяся въ сей формулѣ  $3a + 1$ .

Напротивъ того тѣ , которыя  $2$  даютъ остатку суть слѣдующія :

$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20$  и такъ далѣе, которыя въ сей формулѣ  $3a + 2$  заключающіяся , такъ что всѣ числа или въ формѣ  $3a$  , или въ  $3a + 1$  , или въ  $3a + 2$  содержатся.

бг.

Когда же дѣлитель будетъ  $4$  , то всѣ числа , которыя на онаго раздѣлятся могутъ , суть слѣдующія :

$4, 8, 12, 16, 20, 24$  и такъ далѣе, кои всегда четьрьмя возрастаютъ и въ формулѣ  $4a$  заключающіяся ; а прочія

В  $3$

числа



## 38 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

числа , которыя на 4 раздѣлились не могутъ , оставляютъ въ остаткѣ или 1 , и по сему превышаютъ оныя единицею , яко слѣдующія : 1 , 5 , 9 , 13 , 17 , 21 , 25 и такъ далѣе , и слѣдовательно въ сей формулѣ  $4a + 1$  заключающа ; или оставляютъ въ остаткѣ 2 , какъ на прим.

2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 и такъ далѣе , и въ сей формулѣ  $4a + 2$  заключаются . А ежели наконецъ въ остаткѣ будетъ 3 , то такія числа суть слѣдующія .

3 , 7 , 11 , 15 , 19 , 23 , 27 , и такъ далѣе , и въ формулѣ  $4a + 3$  заключающа , такъ что всѣ числа въ сихъ 4 хъ формулахъ  $4a$  ,  $4a + 1$  ,  $4a + 2$  ,  $4a + 3$  содержатся .

62.

Тожъ самое дѣлается и съ дѣлителемъ 5 : понеже всѣ числа , которыя на него раздѣлишь можно въ формулѣ  $5a$  заключающа ; а тѣ , которыхъ не можно , суть слѣдующія :

$5a + 1$  ,  $5a + 2$  ,  $5a + 3$  , и  $5a + 4$  ; и такъ далѣе : сіе разсужденіе и до всѣхъ дѣлителей простирается .

63.

63.

Здѣсь весьма прилично упомянуть о предложенномъ выше разрѣшеніи чиселъ на простыя множители: ибо всякое число, между котораго множителями или 2, или 3, или 5, или 7 или другое какое первое число находится, на оныя раздѣлился можетъ; яко бо то же, что и 2. 2. 3. 5, то явно есть, что бо на 2, на 3 и на 5 раздѣлился.

64.

Понеже вообще формула  $abcd$  не только на  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , раздѣлиться можетъ, но и на слѣдующія:  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$ ,  $bd$ , и  $cd$ ; такъ же на  $abc$ ,  $abd$ ,  $acd$ ,  $bcd$ , и наконецъ на  $abcd$ , то есть на самую себя. То подобнымъ образомъ и бо ш. е. 2. 2. 3. 5, кромѣ что на простыя числа 2, 3, 5 но и на сложенные изъ двухъ простыхъ, какъ 4, 6, 10, 15, да и на произшедшія изъ трехъ простыхъ 12, 20, 30 и самого себя бо раздѣлиться можетъ.

65.

И такъ представивъ каждое число въ его простыхъ множителяхъ, весьма

## 40 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

легко показать всѣ тѣ числа , на которыя оно раздѣлится можетъ, ибо надлежитъ только взять cadaго изъ простыхъ множителей особенно , потомъ 2 , 3, 4 и такъ далѣе между собою помножить , пока дойдешь до преждепомняшаго числа самаго.

66.

Паче всего примѣчать здѣсь должно, что каждое число на 1 раздѣлить можно, такъ же и на самаго себя, такъ что каждое число по меньшей мѣрѣ 2 хъ дѣлителей имѣетъ , т. е. 1 и самаго себя. Такія числа которыя кромѣ сихъ двухъ дѣлителей никакихъ другихъ не имѣютъ, суть тѣ же самыя , которыя выше сего простыми , первыми или первоначальными числами названы.

Но всѣ сложныя кромѣ 1 и самаго себя , еще другихъ дѣлителей имѣютъ , что изъ слѣдующей таблицы видѣть можно , гдѣ подъ каждымъ числомъ всѣ его дѣлители поставлены.

Таблица.

ТАБЛИЦА.

| 1          | 2   | 3   | 4 | 5   | 6 | 7   | 8 | 9 | 10 | 11  | 12 | 13  | 14 | 15 | 16 | 17  | 18 | 19  | 20 |
|------------|-----|-----|---|-----|---|-----|---|---|----|-----|----|-----|----|----|----|-----|----|-----|----|
|            | 2   | 1   | 1 | 1   | 1 | 1   | 1 | 1 | 1  | 1   | 1  | 1   | 1  | 1  | 1  | 1   | 1  | 1   | 1  |
|            | 1   | 3   | 2 | 5   | 2 | 7   | 2 | 3 | 2  | 11  | 2  | 13  | 2  | 3  | 2  | 17  | 2  | 19  | 2  |
|            |     |     | 4 |     | 3 |     | 4 | 9 | 5  |     | 3  |     | 7  | 5  | 4  |     | 3  |     | 4  |
|            |     |     |   |     | 6 |     | 8 |   | 10 |     | 4  |     | 14 | 15 | 8  |     | 6  |     | 5  |
|            |     |     |   |     |   |     |   |   |    |     | 6  |     |    |    | 16 |     | 9  |     | 10 |
|            |     |     |   |     |   |     |   |   |    |     | 12 |     |    |    |    |     | 18 |     | 20 |
| 1          | 2   | 2   | 3 | 2   | 4 | 2   | 4 | 3 | 4  | 2   | 6  | 2   | 4  | 4  | 5  | 2   | 6  | 2   | 6  |
| пр.<br>ис. | пр. | пр. |   | пр. |   | пр. |   |   |    | пр. |    | пр. |    |    |    | пр. |    | пр. |    |

67.

Наконецъ еще примѣчать должно , что о за такое число почипашъ надлежитъ , которое на всѣ возможные числа раздѣлиться можетъ ; попому что когда о на а раздѣлится должно , по въ частномъ числѣ всегда бываетъ о ; ибо о а составляетъ о , и такъ весьма примѣчать надлежитъ , что всякое число умноженное о мѣ ничего не производитъ.



## ГЛАВА VII.

## О дробяхъ вообще.

68.

Когда число наприм. 7 на другое число какъ три раздѣлить не можно, то оное такъ разумѣть должно, что частнаго числа цѣлымъ числомъ изобразить не лзя; а не такъ чтобъ невозможно было имѣть о частномъ числѣ понятія.

Представь себѣ только линію въ 7 сажень длиною, то никакого сомнѣнія не будетъ, чтобъ не возможно было раздѣлить сей линіи на 3 равные части, и о величинѣ такой части имѣть понятія.

69.

Получа о частномъ числѣ въ такихъ случаяхъ произшедшемъ ясное понятіе, хотя оно и не цѣлое число, доходимъ чрезъ оное до познанія особливаго роду чиселъ, которыя *дробями* или *ломаными числами* называются.

И по сему въ вышепомянутомъ примѣрѣ , гдѣ 7 на 3 раздѣлено быть должно , имѣемъ ясное понятіе о производящемъ отпуду частномъ числѣ , которое обыкновенно слѣдующимъ образомъ изображается  $\frac{7}{3}$  , гдѣ въ верху поставленное число 7 показываетъ дѣлимое число, а внизу поставленное 3 дѣлителя.

70.

И такъ когда вообще какое либо число а раздѣлить должно на в, то частное число изображается чрезъ  $\frac{a}{b}$  , которое начертаніе дробью называется. Чего ради никакого лучшаго понятія о такой дроби  $\frac{a}{b}$  дать не можно , какъ только сказать , что чрезъ то показывается частное число , которое происходитъ , когда верхнее число раздѣлишь на нижнее ; при чемъ еще сіе примѣчать должно , что при всѣхъ такихъ дробяхъ верхнее число числителемъ , а нижнее знаменателемъ называется.

71.

Въ вышепомянутой дроби  $\frac{7}{3}$  , которая словами семь третей выговаривается,

## 44 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

7 есть числитель, а 3 знаменатель; равнымъ образомъ выговаривается и сія дробь  $\frac{1}{2}$  одна половина,  $\frac{2}{3}$  двѣ трети,  $\frac{3}{4}$  три четверти,  $\frac{3}{8}$  три осмины,  $\frac{12}{100}$  двенадцать сотыхъ.

72.

Для полнаго свѣденія свойства дробей, рассмотримъ въ первыхъ пошъ случай, въ которомъ верхнее число равно нижнему, или числитель знаменателю, какъ  $\frac{a}{a}$ : понеже чрезъ сіе означается частное число произходящее когда а раздѣлишь на а, то слѣдуетъ изъ того, что сіе частное число есть точно 1: слѣдовательно дробь  $\frac{a}{a}$  равна 1 или цѣлому, чего ради слѣдующіе дроби, какъ  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{3}$ ,  $\frac{4}{4}$ ,  $\frac{5}{5}$ ,  $\frac{6}{6}$ ,  $\frac{7}{7}$ ,  $\frac{8}{8}$  и такъ далѣе, равны между собою, и каждая изъ нихъ равна 1 цѣ или цѣлому.

73.

Понеже каждая дробь, коей числитель равенъ знаменателю ни больше ни меньше единицы, то всѣ такія дроби, которыхъ числители меньше знаменателей,  
меньше

меньше единицы. И такъ когда меньшее число на большее раздѣлить должно, то выйдетъ дробь меньше единицы, когда на прим. линѣю въ двѣ сажени на три равныя части раздѣлить должно; то одна часть безъ сомнѣнїя меньше будетъ одной сажени: чего ради  $\frac{2}{3}$  меньше 1 цы потому, что числитель 2 меньше знаменателя 3 хъ.

74.

Есть ли напротивъ того числитель больше знаменателя, то дробь будетъ больше единицы, по сему  $\frac{3}{2}$  больше 1 цы, понеже  $\frac{3}{2}$  равны  $\frac{2}{2}$  и  $\frac{1}{2}$ , а  $\frac{2}{2}$  равны 1 цѣ, то  $\frac{3}{2}$  равны будутъ 1 ш. е. цѣлому и еще  $\frac{1}{2}$  слѣдовательно 1  $\frac{1}{2}$ . Равнымъ образомъ и  $\frac{4}{3}$  равны 1  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{5}{4}$  равны 1  $\frac{2}{4}$ , а  $\frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$ .

И вообще должно въ такихъ случаяхъ верхнее число раздѣлить только на нижнее, и къ частному числу прижать еще дробь, которая числитель есть остатокъ, а знаменатель дѣлитель, и такъ для дроби  $\frac{43}{12}$  раздѣливъ 43 на 12 въ



## 46 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

въ частномъ числѣ будетъ 3 , а въ остаткѣ 7 , слѣдовательно  $\frac{43}{12}$  равны  $3\frac{7}{12}$ .

75.

Изъ сего видно, какимъ образомъ дроби, коихъ числители больше знаменателей, на 2 части раздѣлить можно, изъ которыхъ первая есть цѣлое число, а другая дробь, которая числитель меньше знаменателя: по чему такія дроби, гдѣ числитель больше знаменателя *неправильными* называются, ибо они 1 цу или больше цѣлыхъ въ себѣ содержатъ. Напрощивъ того *правильными* дробями тѣ, коихъ числитель меньше знаменателя, слѣдовательно меньше 1 цу или цѣлаго.

76.

Свойство дробей можно еще и другимъ яснѣйшимъ образомъ представить. Напр. есть ли взять въ разсужденіе дробь  $\frac{3}{4}$ , то явствуетъ, что она 3 жды больше  $\frac{1}{4}$ , а знаменованіе дроби  $\frac{1}{4}$  состоитъ въ томъ, что когда 1 цу раздѣлишь на 4 равныя части, то такая часть покажетъ знаменованіе оной, и такъ 3 такіе

кіе части вмѣстѣ взятыя, составляютъ дробь  $\frac{3}{4}$ .

То же самое бываетъ и при каждой другой дроби какъ  $\frac{7}{12}$ , когда 1 цу раздѣлишь на 12 равныхъ частей, то 7 такихъ частей составятъ помянутую дробь.

77.

Изъ сего примѣра произошли и вышепомянутые имена *числителя* и *знаменателя*: ибо въ прежней дроби  $\frac{7}{12}$  нижнее число показываетъ, что 1 на 12 равныхъ частей раздѣлишь должно, то есть: когда оно опредѣляетъ сіе число частей, то удобно его *знаменателемъ* называють.

А поелику верхнее число 7 показываетъ, что для помянутой дроби, 7 такихъ частей взявъ надлежитъ, то для сей причины *числителемъ* его и назвали.

78.

Мы рассуждаемъ теперь о дробяхъ, у которыхъ *числитель* 1 и на которыхъ всѣ другіе дроби основаны: ибо  
не

не трудно уже понять знаменованіе  $\frac{3}{4}$ , когда извѣстно, что значить  $\frac{1}{4}$  такъ какъ и слѣдующіе дроби  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{11}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{13}$  и такъ далѣе: причемъ примѣчая надлежитъ, что сіи дроби всегда меньше становящіяся, чѣмъ больше будетъ число, на которое дѣлился единица, какъ наприм.  $\frac{1}{100}$  часъ гораздо меньше, нежели  $\frac{1}{10}$ ;  $\frac{1}{1000}$  меньше, нежели  $\frac{1}{100}$ ;  $\frac{1}{10000}$  меньше, нежели  $\frac{1}{1000}$  и такъ далѣе.

79.

Изъ сего явствуется, что чѣмъ больше у такихъ дробей становится знаменатель, тѣмъ меньше должно быть знаменованіе оныхъ. Откуда рождается слѣдующей вопросъ: не можетъ ли знаменатель быть такъ великъ, чтобъ дробь совсѣмъ исчезла и въ ничто обратилась? но сіе по справедливости опровергается: ибо на сколько равныхъ частей единицу, наприм. длину одной сажени ни раздѣлишь, однако тѣ части всегда будутъ имѣть нѣкоторую величину, и слѣдовательно не ничто.

80.

Хотя и правда , что когда длину одной сажени раздѣлишь больше нежели на 1000 равныхъ частей, то оныя части едва глазами видѣть можно ; но какъ скоро на оныя въ хорошей микроскопѣ посмотришь , то покажутся такъ великими , что еще на 1000 или больше равныхъ частей раздѣлить можно.

Но здѣсь не о томъ рѣчь , что мы здѣлать можемъ , или что въ самомъ дѣлѣ можетъ здѣлаться , и что еще усмотрѣть можно ; но паче о томъ, что само собою возможно. И такъ справедливо , что какъ бы ни великъ былъ взявъ знаменатель , дробь вовсе исчезнуть, или въ ничто или въ 0 обратиться не можетъ.

81.

Понеже дробь совсѣмъ исчезнуть не можетъ, какъ бы знаменатель ни увеличился , но сохраняетъ еще нѣкоторую величину , то изъ сего слѣдуетъ , что вышешюмянутой рядъ дробей бесконечно

Г

про-

## 50 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

продолжаться можешъ : почему обыкновенно говорится , что знаменателю надлежало бы быть бесконечно великому, что бы дробь  $\frac{1}{\infty}$  или  $\frac{1}{\infty}$  ничто обратилась ; ибо слово *бесконечно* не иное что здѣсь значитъ , какъ что въ упомянутомъ дробей ряду никогда къ концу не придешъ.

82.

Для представленія сего на твердомъ основаніи положеннаго понятія , употребляютъ знакъ  $\infty$ , которой бесконечно великое число означаетъ ; и для того можно сказать , что дробь  $\frac{1}{\infty}$  есть дѣйствительно ничего ; по тому что такая дробь до тѣхъ поръ ни во что обратиться не можешъ , пока знаменатель бесконечно не увеличится.

83.

Сіе понятіе о бесконечныхъ, тѣмъ наипаче примѣчанія достойно , что оно изъ первыхъ основаній нашего познанія выведено , и впредь весьма важно и полезно будетъ. Можно уже и здѣсь изъ  
этого

того вывести изрядныя и нашего примѣчанія достойныя слѣдствія. Понеже дробь  $\frac{1}{\infty}$  показываетъ частное, когда дѣлимое 1 раздѣлишь на дѣлителя  $\infty$ ; но извѣстно также, что когда дѣлимое 1 на частное число  $\frac{1}{\infty}$  или 0, какъ мы прежде видѣли, раздѣлишь, выйдетъ дѣлитель  $\infty$ ; то получаемъ изъ того новое понятіе о безконечныхъ, а именно, что оныя производятъ, когда 1 раздѣлишь на 0: слѣдовательно по справедливости сказать можно, что 1 раздѣленная на 0 безконечно великое число или  $\infty$  означаетъ.

84.

Здѣсь должно изпробить нарочито застарѣвшуюся погрѣшность: многіе утверждаютъ, что безконечно великое увеличено быть далѣе не можетъ; но сіе съ вышепомянутыми твердыми основаніями не согласно.

Ибо когда  $\frac{1}{2}$  безконечно великое число означаетъ, то  $\frac{2}{2}$  конечно дважды больше перваго; изъ сего слѣдуетъ, что

безконечно великое число еще дважды больше быть можетъ.



## ГЛАВА VIII.

о свойствахъ дробей.

85.

Какъ мы выше сего видѣли, что всѣ такія дроби какъ:  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{3}$ ,  $\frac{4}{4}$ ,  $\frac{5}{5}$ ,  $\frac{6}{6}$ ,  $\frac{7}{7}$ ,  $\frac{8}{8}$ ,  $\frac{9}{9}$  и проч. цѣлое составляющъ, и слѣдующія  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{4}{2}$ ,  $\frac{6}{3}$ ,  $\frac{8}{4}$ ,  $\frac{10}{5}$  и такъ далѣе также между собою равны; попому что каждая изъ нихъ даетъ два цѣлыя, ибо числитель каждой дроби раздѣленной на своего знаменателя 2 производитъ; равнымъ образомъ и сіи дроби  $\frac{3}{1}$ ,  $\frac{6}{2}$ ,  $\frac{9}{3}$ ,  $\frac{12}{4}$ ,  $\frac{15}{5}$ ,  $\frac{18}{6}$  и такъ далѣе суть равны между собою; попому что знаменованіе каждая есть 3.

86.

Подобнымъ образомъ можно знаменованіе каждой дроби многоразличными образами представить; ибо когда числителя и знаменателя какой нибудь дроби

взятымъ по изволению числомъ помножишь, то новая дробь поѣ самое знаменованіе получаетъ. И такъ всѣ сїи дроби какъ :

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}$  и такъ далѣе, равны между собою, и каждая равна  $\frac{1}{2}$ . Равнымъ образомъ и сїи дроби какъ :

$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}$  и такъ далѣе равны между собою и каждая равна  $\frac{1}{3}$  также и сїи :

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$  и такъ далѣе, равны между собою; чего ради сїя дробь  $\frac{a}{b}$  обще слѣдующими образы представлена быти можетъ. Какъ наприм.

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}$  и такъ далѣе изъ коихъ каждая дробь равна первой  $\frac{a}{b}$ .

87.

Но что бы сїе доказать, то вмѣсто дробнаго числа  $\frac{a}{b}$  напиши особливую букву с, что бы с значило частное число когда а на b раздѣлится; но какъ уже показано, что по умноженіи частнаго



## §4 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

наго числа с дѣлителемъ в несомнѣнно дѣлимому выпши должно ; и понеже с умноженное на в даетъ а , то с умноженное на 2 в даетъ 2 а , а с умноженное на 3 в даетъ 3 а , то и вообще с умноженное на тв несомнѣнно та дать долженствуетъ.

А естли здѣлаешь изъ сего примѣръ дѣленія и произведеніе та раздѣлишь на одного множителя т в , то должно частное выпши равно другому множителю с ; но та раздѣленное на тв даетъ дробь  $\frac{та}{тв}$  , которой частному числу слѣдуетъ быть с , а с равно знаменованію дроби  $\frac{а}{в}$  : то дробь  $\frac{та}{тв}$  должна быть равна дроби  $\frac{а}{в}$  . вмѣсто т можно взять число по своему изволенію,

88.

Понеже всякую дробь различными образами предсавить можно , изъ которыхъ всѣ тоже самое знаменованіе въ себѣ заключаютъ ; то безсомнѣнія такая дробь понятнѣе , кошорая состо-

итъ

итѣ изъ малѣйшихъ чиселъ, какъ напр. когда вмѣсто  $\frac{2}{3}$  по изволенію каждая изъ сихъ дробей какъ  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{6}{9}$ ,  $\frac{8}{12}$ ,  $\frac{10}{15}$ ,  $\frac{12}{18}$  и пакъ далѣе, постановлена быть можетъ, то никто не усумнится, чтобъ дробь  $\frac{2}{3}$  не была внятнѣе прочихъ; причемъ сіе спрашивается, какимъ образомъ дробь, въ большихъ числахъ состоящую, какъ напр.  $\frac{8}{12}$  привеситъ въ состоящую изъ малѣйшихъ, и. е. въ  $\frac{2}{3}$ .

89.

Вопросъ сей легко рѣшить можно, еслии только припомнимъ, что дробь не переменяетъ своего знаменованія, когда ея числитель и знаменатель однимъ числомъ помножится: изъ чего слѣдуетъ, что когда числитель и знаменатель какой нибудь дроби, на одно число раздѣлены будутъ, то дробь силы своея не переменитъ, что легче всего изъ изображенной вообще дроби  $\frac{na}{nb}$  усмотрѣть можно; ибо когда числителя  $na$  и знаменателя  $nb$  раздѣлимъ на  $n$ , то выйдетъ дробь  $\frac{a}{b}$  которая равна прежней дроби  $\frac{na}{nb}$ , какъ выше сего показано.

90.

Для изображенія дроби малыми числами , надлежитъ найти такія числа , на которыя бы какъ числитель , такъ и знаменатель могъ раздѣлиться : такое число называется общимъ дѣлителемъ ; а пока числитель и знаменатель общаго дѣлителя не имѣютъ , до того и дробь меньшими числами изобразить не можно ; а ежели никакого дѣлителя нѣтъ кромѣ 1 , то значитъ , что дробь уже самыми малыми изображена числами.

91.

Чтобъ сіе изъяснить обстоятельнѣе, возмемъ въ разсужденіе дробь  $\frac{48}{120}$  , гдѣ потчасъ видимъ , что числитель и знаменатель на 2 раздѣлиться можетъ : откуда произойдетъ дробь  $\frac{24}{60}$  , которой числителя и знаменателя можно такожде раздѣлить на 2 , и произойдетъ слѣдующая дробь  $\frac{12}{30}$  , гдѣ еще общей дѣлитель есть 2 и произойдетъ  $\frac{6}{15}$  ; здѣсь видно , что числитель и знаменатель еще на 3 раздѣлиться могутъ , откуда произойдетъ дробь

дробь  $\frac{2}{5}$ , которая равна будетъ предложенной и въ самыхъ меньшихъ числахъ представлена ; потому что 2 и 5 общаго дѣлителя не имѣютъ кромѣ 1, отъ котораго числа уже не уменьшашся.

92.

Сіе свойство дробей , что когда числитель и знаменатель однимъ числомъ помножашся или на него раздѣляшся , дроби не перемѣняшся , есть весьма важно , и на ономъ вообще все ученіе о дробяхъ утверждается ; потому что двухъ дробей ни вмѣстѣ сложить ни одну изъ другой вычесть не можно , пока не превращены будутъ въ іакія дроби , коихъ знаменатели равны между собою , о чемъ въ слѣдующей главѣ предложено будетъ пространнѣе.

93.

Здѣсь еще упомянемъ , что цѣлыя числа во образѣ дроби представлены быть могутъ. Какъ напр. 6 равны  $\frac{6}{1}$ , потому что 6 раздѣленное на 1 дастъ 6, откуда

Г 5

да

## 58 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

да слѣдующіе образы дробей производятъ, какъ :

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{24}{4}$ ,  $\frac{30}{5}$ ,  $\frac{36}{6}$ , и такъ далѣе, когорые всѣ одну силу или знаменованіе имѣютъ, т. е. 6.



## ГЛАВА IX.

О сложеніи и вычитаніи дробей.

94.

Дроби одинакихъ знаменателей весьма легко сложить и вычесть можно; ибо  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$  даютъ  $\frac{5}{7}$  а  $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$  даютъ  $\frac{2}{7}$ . Въ семъ случаѣ складывающіяся и вычитаются только одни числители, а внизу подписывается общій знаменатель, какъ напр.  $\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$  даютъ  $\frac{9}{100}$ ; а  $\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$  даютъ  $\frac{36}{50}$  или  $\frac{18}{25}$ ,  $\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$  составляютъ  $\frac{16}{20}$  или  $\frac{4}{5}$ , также  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$  равны  $\frac{3}{3}$  или 1, а  $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$  даютъ  $\frac{0}{4}$  т. е. ничего.

95.

А разныхъ знаменателей дроби можно привести къ одному. Такъ когда

сѣи

сїи дроби  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$  сложить должно, по-  
неже  $\frac{1}{2}$  равна  $\frac{3}{6}$  а  $\frac{1}{3}$  равна  $\frac{2}{6}$ ; по чему вмѣ-  
сто прежнихъ дробей будемъ имѣть сїи  
 $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ , которыя даютъ  $\frac{5}{6}$ : а  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$  подобнымъ  
образомъ приведенные къ одному знаме-  
нателью съ той переменною, что —  
между оными поставленъ,  $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$  даютъ  $\frac{1}{6}$ .  
Пусть еще будутъ слѣдующія дроби:  
какъ  $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$ , по понеже  $\frac{3}{4}$  равны  $\frac{6}{8}$ , можно  
на мѣсто  $\frac{3}{4}$  поставить  $\frac{6}{8}$  и такъ  $\frac{6}{8} + \frac{5}{8}$  да-  
ютъ  $\frac{11}{8}$  или  $1\frac{3}{8}$ . Когда спрашивается ско-  
лько  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{4}$  вмѣстѣ составляютъ, по  
пишутъ вмѣсто оныхъ  $\frac{4}{12}$  и  $\frac{3}{12}$ , которыя  
 $\frac{7}{12}$  составляютъ.

96.

Ежели больше двухъ дробей дано  
будетъ, какъ на прим.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$ , кои  
къ одному знаменателю привести дол-  
жно, по все дѣло состоитъ въ томъ,  
чтобъ найти число, которое на всѣ сїи  
знаменатели раздѣлиться можетъ, та-  
кое въ семъ случаѣ есть 60, которое  
есть оной общей знаменатель; и такъ  
вмѣсто  $\frac{1}{2}$  поставимъ  $\frac{30}{60}$ , вмѣсто  $\frac{2}{3}$  поста-  
вимъ

## 60 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

вишь  $\frac{40}{60}$ , вмѣсто  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{45}{60}$ , вмѣсто  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{48}{60}$ , вмѣсто  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{50}{60}$ ; и ежели сїи дроби  $\frac{30}{60}$ ,  $\frac{40}{60}$ ,  $\frac{45}{60}$ ,  $\frac{48}{60}$ ,  $\frac{50}{60}$  вмѣстѣ сложишь должно, то числители ихъ соспавятъ  $\frac{213}{60}$  или 3 цѣлыхъ и  $\frac{33}{60}$  или 3  $\frac{11}{20}$ .

97.

И такъ все дѣло къ тому клонится, что бы двѣ дроби разныхъ знаменателей имѣющія превратить въ такіе, коихъ бы знаменатели равны были между собою. А чтобъ сїе общимъ образомъ учинить, то пусть будутъ помянутыя дроби  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{c}{d}$ : умножь первую дробь въ верьху и въ низу на  $d$ , то получишь  $\frac{ad}{bd}$ , которая будетъ равна  $\frac{a}{b}$ ; потомъ умножь и другую такъ какъ и прежнюю въ верьху и въ низу на  $b$ , то получишь мѣсто оной  $\frac{bc}{bd}$ , и такъ знаменатели теперь равны между собою, чего ради сумма оныхъ дробей будетъ  $\frac{ad+bc}{bd}$ , а разность  $\frac{ad-bc}{bd}$ . И такъ ежели предложены будутъ дроби  $\frac{5}{8}$  и  $\frac{7}{9}$ , то получишь мѣсто оныхъ сїи  $\frac{45}{72}$  и  $\frac{56}{72}$ .

98.

98.

Здѣсь такожде случается вопросъ: копорая изъ двухъ данныхъ дробей больше или меньше другой, какъ то изъ сихъ двухъ  $\frac{2}{3}$  и  $\frac{5}{7}$  копорая больше? для сего надлежитъ только обѣ дроби привесть къ одному знаменателю, то вмѣсто первой получишь  $\frac{14}{21}$ , а вмѣсто другой  $\frac{15}{21}$ , изъ чего видно, что  $\frac{5}{7}$  больше нежели  $\frac{2}{3}$  а именно  $\frac{1}{20}$  долею. Ежели еще даны будутъ на примѣръ сїи дроби  $\frac{5}{8}$  и  $\frac{5}{8}$ , то вмѣсто ихъ получишь  $\frac{24}{48}$  и  $\frac{25}{48}$ , изъ чего видно, что  $\frac{5}{8}$  больше  $\frac{3}{8}$ , но токмо  $\frac{1}{48}$  долею.

99.

Ежели дробь изъ цѣлаго числа вычестъ должно, какъ  $\frac{2}{3}$  изъ 1, то вмѣсто 1 можно поставитъ  $\frac{3}{3}$ , изъ чего тотчасъ увидишь что въ остаткѣ будетъ  $\frac{1}{3}$ ; также  $\frac{5}{12}$  вычтенные изъ 1 дають  $\frac{7}{12}$ , а ежели  $\frac{3}{4}$  должно вычестъ изъ 2, то вмѣсто 2хъ поставь только 1 и  $\frac{4}{4}$ , то останется 1 и  $\frac{1}{4}$ . Впрочемъ извѣстно, что когда дробь къ цѣлому числу придашь



## 62 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

дашь должно , то поставь оное просто при оной дроби , какъ нарим.  $\frac{2}{3}$  приданныя къ 6 , дають 6 и  $\frac{2}{3}$  или  $6\frac{2}{3}$ .

100.

Случается иногда , что двѣ дроби или больше вмѣстѣ сложенныя больше одного цѣлаго составляютъ , что изъ слѣдующихъ примѣровъ явствуетъ : яко  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$  или  $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$  дають  $\frac{17}{12}$  то есть  $1\frac{5}{12}$  тожъ самое бываешъ , когда многія цѣлыя числа и дроби сложить должно , то сложи сперва дроби , и еслили сумма выйдетъ цѣлое или больше цѣлаго одного , то приложи оныя попомъ къ цѣлымъ числамъ. И такъ когда спрашивается , что  $3\frac{1}{2}$  и  $2\frac{2}{3}$  вмѣстѣ составляютъ ? то дроби  $\frac{3}{6}$  и  $\frac{4}{6}$  сложенныя вмѣстѣ дають  $\frac{7}{6}$  , что съ цѣлыми числами 6 и  $\frac{1}{6}$  составляютъ.



## ГЛАВА X.

## Объ умноженіи и дѣленіи.

101.

Ежели дробь должно будеть умножить цѣлымъ числомъ, то помножь онымъ числителя, а знаменателя оставь непремѣнна, какъ напр. 2 ды  $\frac{1}{2}$  дѣлаетъ  $\frac{2}{2}$  или 1; 2 ды  $\frac{1}{3}$  дѣлаетъ  $\frac{2}{3}$ ; 3 ды  $\frac{1}{6}$  составляетъ  $\frac{3}{6}$  или  $\frac{1}{2}$ ; 4 ды  $\frac{5}{12}$  составляють  $\frac{20}{12}$  или 1 цѣлое и  $\frac{8}{12}$  или  $\frac{2}{3}$ , изъ сего выводять слѣдующее правило: когда дробь цѣлымъ числомъ помножить должно, то или числителя помножь, или знаменателя раздѣли на оное цѣлое число, и сѣ послѣднее правило сокращаетъ изчисленіе, какъ напр.  $\frac{8}{9}$  умноженные 3 мя дають  $\frac{8}{3}$  т. е. 2 и  $\frac{2}{3}$ , также  $\frac{13}{24}$  умноженные 6 пью дають  $\frac{13}{4}$  или  $3\frac{1}{4}$ .

102.

И такъ вообще когда дробь  $\frac{a}{b}$  умножить должно на с, то выйдетъ  $\frac{ac}{b}$ ; при семъ

## 64 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

семь примѣчать надлежитъ , что когда цѣлое число точно равно знаменателю , то произведеніе равно будетъ тогда числителю , какъ напр.

$\frac{1}{2}$  дважды взятая даетъ 1.

$\frac{2}{3}$  умноженное тремя даетъ 2.

$\frac{3}{4}$  умноженное четырьмя даетъ 3.

И вообще , когда дробь  $\frac{a}{b}$  умножена будетъ числомъ  $b$  , то произведеніе выйдетъ  $a$  , чему основаніе уже выше сего положено ; ибо выше изчислено , что  $\frac{a}{b}$  частное число изъясляетъ дѣлимаго  $a$  , раздѣленнаго на  $b$  , и при томъ показано , что частное число умноженное дѣлителемъ произвестъ должно дѣлимое , то изъ сего слѣдуетъ , что  $\frac{a}{b}$  умноженное на  $b$  должно дать  $a$ .

103.

Показавъ теперь умноженіе дроби цѣлымъ числомъ , надлежитъ намъ также показать какимъ образомъ дробь на цѣлое число раздѣлить можно , прежде нежели приступимъ мы къ изъясненію умноженія дроби дробью ; но сіе ясно , что

что когда я дробь  $\frac{2}{3}$  раздѣлю на 2, то въ частномъ будетъ  $\frac{1}{3}$ , также когда  $\frac{6}{7}$  раздѣлю на 3, въ частномъ числѣ выдѣстъ  $\frac{2}{7}$ ; изъ сего слѣдуетъ, что числителя на цѣлое число раздѣлить должно, а знаменателя оставитъ непремѣнна, какъ напр.

$$\frac{12}{25} \text{ разд. на 2 дають } \frac{6}{25}$$

$$\frac{12}{25} \text{ разд. на 3 дають } \frac{4}{25}$$

$$\frac{12}{25} \text{ разд. на 4 дають } \frac{3}{25}$$

и такъ далѣе.

104.

И такъ нѣтъ въ семъ дѣлѣ никакой трудности, когда числитель на данное цѣлое число раздѣлиться можетъ; а ежели не можетъ, то надлежитъ припомнить, что каждую дробь въ бесконечно многія другія превращать можно, между которыми число новыхъ дробей несомнѣнно найдется и такая, коея числитель на данное число раздѣлиться можетъ. Какъ наприм. ежели  $\frac{5}{8}$  раздѣлить должно на 2, то приведи сию дробь въ  $\frac{6}{8}$ , отъ чего по раздѣленіи оной на 2 произойдетъ  $\frac{3}{8}$ .

Д

естьли

## 66 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

Естьли вообще дробь  $\frac{a}{b}$  раздѣлить должно на  $c$ , то приведи оную дробь въ  $\frac{ac}{bc}$ , коея числитель  $ac$  раздѣленной на  $c$  дастъ  $a$ , и такъ искомое частное число будетъ  $\frac{a}{bc}$ .

105.

Изъ сего явствуется, что когда дробь  $\frac{a}{b}$  раздѣлить должно на цѣлое число  $c$ , то надлежитъ только знаменателя  $b$  умножить симъ цѣлымъ числомъ; а числителя не перемѣнять, какъ напр.

$\frac{5}{8}$  раздѣленные на 3, даютъ  $\frac{5}{24}$ ;  $\frac{9}{16}$  раздѣленные на 5, даютъ  $\frac{9}{80}$ ; но когда самага числителя на цѣлое число раздѣлить можно, то вычисленіе пѣмъ будетъ легче, какъ напр.  $\frac{9}{16}$  раздѣленные на 3 даютъ  $\frac{3}{16}$ , а другимъ образомъ  $\frac{9}{48}$ , которая дробь однако равна помянутой  $\frac{3}{16}$ ; ибо  $\frac{9}{48} \left| \frac{3}{16} \right.$ .

106.

Теперь можемъ мы показать, какимъ образомъ дробь  $\frac{a}{b}$  умножить должно на дробь  $\frac{c}{d}$ . Надлежитъ только помнить

что

что  $\frac{c}{d}$  есть с раздѣленное на d и такъ  
 должно только сперва дробь  $\frac{a}{b}$  умно-  
 жить на с, и произойдетъ  $\frac{ac}{b}$ , потомъ  
 раздѣлить на d и выйдетъ  $\frac{ac}{bd}$ ; изъ чего  
 слѣдуетъ, что въ умноженіи двухъ  
 дробей между собою, надлежитъ спер-  
 ва числителей, а потомъ знаменателей  
 особо между собой помножить, такъ  
 на прим.  $\frac{1}{2}$  умноженная на  $\frac{2}{3}$  даетъ  $\frac{2}{12}$  или  
 $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$  умноженные на  $\frac{4}{5}$  даютъ  $\frac{8}{15}$ ;  $\frac{3}{4}$  умно-  
 женные на  $\frac{5}{12}$  даютъ  $\frac{15}{48}$  или  $\frac{5}{16}$ , и  
 такъ далѣе.

107.

Теперь осталось показать, какимъ  
 образомъ одну дробь на другую раздѣ-  
 лить должно; причемъ въпервыхъ при-  
 мѣчать надлежитъ, что когда дроби  
 одинакихъ имѣютъ знаменателей, то  
 дѣленіе окончится въ числителяхъ, по-  
 тому что наприм.  $\frac{3}{12}$  въ  $\frac{9}{12}$  столько же  
 разъ содержится сколько 3 въ 9 т. е.  
 3жды; чего ради когда  $\frac{1}{12}$  на  $\frac{9}{12}$  раздѣ-  
 лить должно будетъ, то надлежитъ  
 только 8 раздѣлить на 9 отъ чего

Д 2

про-

## 68 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

произойдетъ  $\frac{1}{9}$ .  $\frac{6}{28}$  въ  $\frac{18}{28}$  содержится 3 жды.  $\frac{7}{105}$  въ  $\frac{49}{105}$  содержится 7 разъ;  $\frac{6}{25}$  на  $\frac{7}{25}$  разделенныя дають  $\frac{6}{7}$ , также  $\frac{3}{7}$  на  $\frac{4}{7}$  дають  $\frac{3}{4}$ .

108.

А разныхъ знаменателей имѣющихъ дроби можно привести къ одинакимъ; такъ когда дробь  $\frac{a}{b}$  раздѣлишь должно на  $\frac{c}{a}$ , то приведи сперва сіи дроби къ одному знаменателю, и получишь дѣлимую  $\frac{ad}{bd}$ , а дѣлителя  $\frac{bc}{bd}$ ; откуду слѣдуетъ, что только числителя первой дроби  $ad$  на числителя послѣдней  $bc$  раздѣлишь должно, слѣдов. искомое частное будетъ  $\frac{ad}{bc}$ .

Изъ сего слѣдующее выходитъ правило: числителя дѣлимаго числа надлежитъ помножить знаменателемъ дѣлителя, а знаменателя дѣлимаго числа числителемъ дѣлителя: то первое произведеніе числителя, а послѣднее дастъ знаменателя въ частномъ числѣ.

109.

И такъ когда  $\frac{5}{8}$  раздѣлишь должно будетъ на  $\frac{2}{7}$ , то въ частномъ числѣ

по

по сему правилу выдепѣ  $\frac{15}{16}$ ; ежели  $\frac{2}{4}$  на  $\frac{1}{2}$  раздѣлишь должно, то получишь  $\frac{6}{4}$  или  $\frac{2}{2}$  т. е. 1 и  $\frac{1}{2}$ , ежели же  $\frac{25}{48}$  раздѣлишь на  $\frac{5}{8}$ , то получишь  $\frac{30}{48}$  или  $\frac{5}{8}$ .

IIО.

Сіе правило дѣленія удобнѣе слѣдующимъ предложится образомъ: дробь, на которую дѣлишь должно, переверопи, поставя знаменателя ея въ верьху, а числителя въ низу, и умножѣ дробь дѣлимую на сію обращенную, и будетъ произшедшее произведеніе искомое частное число. Такъ наприм.  $\frac{2}{4}$  раздѣленные на  $\frac{1}{2}$  равны  $\frac{3}{4}$  умноженнымъ на  $\frac{2}{2}$ , изъ чего произойдетъ  $\frac{6}{4}$  или  $1\frac{1}{2}$ ; также  $\frac{5}{8}$  раздѣленные на  $\frac{2}{3}$  равны  $\frac{5}{8}$  умноженнымъ на  $\frac{3}{2}$ , опъ чего произойдетъ  $\frac{15}{16}$ . Подобно  $\frac{25}{48}$  раздѣленные на  $\frac{5}{8}$ , то же что и  $\frac{25}{48}$  умноженные на  $\frac{8}{5}$ , опъ чего произойдетъ  $\frac{15}{24}$  или какъ выше сего  $\frac{5}{8}$ .

И такъ вообще видно, что на дробь  $\frac{1}{2}$  раздѣленное что нибудь, пожѣ самое ещѣ что и  $\frac{2}{4}$  т. е. 2 мя умножен-



## 70 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

ное , на  $\frac{1}{3}$  раздѣленное тоже что и  $\frac{3}{1}$  ш. е. 3 мя умноженное.

### III.

Чего ради ежели 100 раздѣлишь на  $\frac{1}{2}$ , то въ частномъ числѣ будетъ 200 , а 1000 на  $\frac{1}{3}$  частное будетъ 3000; когда же 1 раздѣлишь на  $\frac{1}{1000}$  , въ частномъ будетъ 1000 ; а 1 на  $\frac{1}{100000}$  въ частномъ дастъ 100000 : изъ сего понять можно, что 1 на 0 раздѣленная въ частномъ дастъ число безмѣрно великое , попому что когда 1 раздѣлишь на сію малую дробь  $\frac{1}{10000000000}$  , въ частномъ числѣ будетъ сіе великое число 10000000000.

### III 2.

Когда дробь саму на себя раздѣ-  
лить должно , то разумѣется , что ча-  
стное число будетъ 1 ; попому что  
каждое число само на себя раздѣленное  
дастъ 1 : тоже самое показываетъ и  
наше правило , когда наприм.  $\frac{3}{4}$  раздѣ-  
лить должно на  $\frac{3}{4}$  , то умножъ  $\frac{3}{4}$  на  $\frac{4}{3}$   
откуда получишь  $\frac{12}{12}$  ш. е. 1 ; а когда  $\frac{a}{b}$   
раздѣ-

раздѣлить должно на  $\frac{a}{b}$ , то умножѣ  $\frac{a}{b}$  на  $\frac{b}{a}$  и произойдетъ  $\frac{ab}{ab}$  т. е. 1.

113.

Еще оспалось изъяснить употребительную рѣчь въ Ариѳметикѣ, какъ на прим. когда говорится половина  $\frac{3}{4}$ хъ, то сѣ есть то же, что  $\frac{3}{4}$  умноженные  $\frac{1}{2}$ ю, также когда спрашивается что есть  $\frac{2}{3}$  дроби  $\frac{5}{8}$ хъ, то найдешь сѣ ежели  $\frac{5}{8}$  умножишь на  $\frac{2}{3}$ , произведеніе  $\frac{10}{24}$  будетъ искомое. Такъ  $\frac{3}{4}$  дроби  $\frac{9}{16}$  будетъ произведеніе  $\frac{27}{64}$ , что весьма наблюдать должно, когда сѣя рѣчь ни случится.

114.

Наконецъ надлежитъ здѣсь въ рассужденіи знаковъ  $+$  и  $-$  то же самое примѣчать что выше сего при цѣлыхъ числахъ показано было, такъ на прим.  $+$   $\frac{1}{2}$  умноженная на  $- \frac{1}{2}$  дастъ  $- \frac{1}{4}$ ;  $- \frac{2}{3}$  умноженные на  $\frac{4}{5}$  дають  $+$   $\frac{8}{15}$ ;  $- \frac{3}{4}$  раздѣленные на  $+$   $\frac{2}{3}$  дають  $- \frac{10}{12}$ ;  $- \frac{3}{4}$  раздѣленные на  $- \frac{3}{4}$  дають  $+$   $\frac{12}{16}$  или  $+$  1.



## ГЛАВА XI.

О квадратныхъ числахъ.

115.

Когда какое число само собою помножено будетъ : то произведеніе называется *квдратомъ* , въ рассужденіи котораго то число , изъ коего оно произошло , *радиксомъ* его *квдратнымъ* или *корнемъ квдратнымъ* называется.

И шакъ , когда напр. 12 умножено будетъ на 12 , произведеніе будетъ 144 квадратное число , котораго корень есть 12.

Основаніе сего названія взято изъ Геометріи , гдѣ симъ образомъ находится величина площади квадрата , то есть : ежели сторона онаго сама собою помножится.

116.

Чего ради всѣ квадратныя числа *ыскиваются* помощію умноженія , когда  
корни

корни сами собою помножены будутъ. Такъ напр: понеже 1 умноженная на 1 дастъ 1, то 1 будетъ квадратъ 1.

На противъ того 4 есть квадратъ 2хъ, а 2 квадратной корень 4хъ.

Также 9 квадратъ 3хъ, а 3 квадратной корень 9ти. Разсмотримъ теперь квадраты натуральныхъ чиселъ, которыхъ числа или корни въ первомъ ряду, а квадраты ихъ во второмъ представлены.

| числа  | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  |
|--------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| квадр: | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 |

117.

Въ сихъ по порядку поставленныхъ квадратныхъ числахъ, видимъ мы изрядное свойство въ томъ состоящее, что когда каждое изъ слѣдующаго вычпено будетъ, остатки составятъ слѣдующей рядъ чиселъ.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, и такъ далѣе, которые всѣ двумя возрастаютъ и составляютъ рядъ нечетныхъ чиселъ.

## 118.

Подобнымъ образомъ сыскиваются и квадраты дробей ; то есть : умноженіемъ дроби самой собою , такъ напр.

$$\frac{1}{2} \text{ квадратъ } \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} \text{ квадратъ } \frac{1}{9}$$

$$\frac{2}{3} \text{ квадратъ } \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{4} \text{ квадратъ } \frac{1}{16}$$

$$\frac{3}{4} \text{ квадратъ } \frac{9}{16} \text{ и такъ далѣе.}$$

Надлежитъ только квадратъ числителя раздѣлить на квадратъ знаменателя , и получишь квадратъ дроби , такъ наприм. дроби  $\frac{5}{8}$  квадратъ  $\frac{25}{64}$  : и обратно  $\frac{5}{8}$  есть корень  $\frac{25}{64}$ .

## 119.

Ежели хочешь найти квадратъ смѣшеннаго числа , состоящаго изъ цѣлаго числа и дроби , то приведи только оное число въ дробь и возми ея квадратъ ; такъ чтобъ сыскать квадратъ ,  $2\frac{1}{2}$  будетъ во первыхъ  $2\frac{1}{2}$  равно  $\frac{5}{2}$  ; и слѣдовательно квадратъ  $\frac{25}{4}$  , что составляетъ  $6\frac{1}{4}$  , по сему  $6\frac{1}{4}$  есть квадратъ  $2\frac{1}{2}$  . Также для сысканія квадрата  $3\frac{1}{4}$  видимъ что  $3\frac{1}{4}$  равна  $\frac{13}{4}$  ,  
котораго

котораго квадратъ будетъ  $\frac{169}{77}$ , что составляетъ  $10\frac{9}{16}$ . Разсмотримъ теперь напр. квадраты чиселъ отъ 3 до 4 на одну четверть возвышающихся.

|           |   |                  |                 |                  |    |
|-----------|---|------------------|-----------------|------------------|----|
| ч и с л а | 3 | $3\frac{1}{4}$   | $3\frac{1}{2}$  | $3\frac{3}{4}$   | 4  |
| квадратъ. | 9 | $10\frac{9}{16}$ | $12\frac{1}{4}$ | $14\frac{1}{16}$ | 16 |

Изъ сего заключить можно, что когда корень есть дробь, то и квадрату дроби быть должно. Такъ напр. когда корень  $1\frac{5}{12}$ , то квадратъ его  $\frac{289}{144}$ , что составивъ  $2\frac{1}{44}$ , которое весьма малымъ числомъ превосходитъ 2.

120.

Когда вообще корень будетъ а, то квадратъ его будетъ аа, также корня 2 а квадратъ будетъ 4аа; изъ чего видно, что когда радикалъ 2 ды больше, то квадратъ будетъ 4 ды больше. А корня 3 а квадратъ будетъ 9аа, и корня 4 а квадратъ 16аа, и такъ далѣе; ежели же корень будетъ аb то квадратъ его ааbб, а корня аbс квадратъ ааббсс.

И такъ когда корень состоитъ изъ двухъ или болѣе множителей , то должно квадраты оныхъ помножить , между собою ; и обратно когда квадратъ состоитъ изъ двухъ или болѣе множителей , изъ которыхъ каждой квадратъ , то надлежитъ только помножить между собою корни оныхъ , такъ на прим. когда 2304 равны 4. 16. 36 то корень ихъ квадратной 2. 4. 6 т. е. 48 , и въ самомъ дѣлѣ 48 есть корень квадратной изъ 2304хъ , потому что 48. 48 равны 2304.

Теперь рассмотримъ знаки  $+$  и  $-$  , что съ ними бываетъ при квадратахъ , изъ чего пошчасъ увидимъ , что ежели корень имѣетъ знакъ  $+$  или будетъ положительное ( прибавочное ) число , какое понынѣ нами принято , то квадратъ онаго также положительное число быть должно ; потому что  $+$  умноженное на  $+$  дастъ въ произведеніи

веденіи  $+$  , и такъ квадратъ изъ  $+$  а  
будетъ  $+$  аа; а когда корень будетъ  
отрицательное ( убыточное ) число ,  
какъ  $-$  а, то квадратъ его будетъ  $+$  аа,  
такъ какъ бы корень былъ  $+$  а: слѣдо-  
вательно  $+$  аа есть квадратъ какъ изъ  
 $+$  а, такъ и  $-$  а; почему каждого ква-  
дратъ имѣетъ два корня квадратныхъ ,  
изъ коихъ одинъ положительной, а дру-  
гой отрицательной. Такъ корень ква-  
дратной 25ти, есть какъ  $+$  5, такъ и  
 $-$  5 , потому что  $+$  5 умноженное на  
 $+$  5 , и  $-$  5 умноженное на  $-$  5 дающъ  
 $+$  25.



## ГЛАВА XII.

О квадратныхъ корняхъ и происходящихъ  
отсюда неизвлекаемыхъ числахъ.

123.

Изъ прежняго видно , что корень ква-  
дратной изъ даннаго числа , не что  
иное есть , какъ такое число , кото-  
раго квадратъ равенъ данному числу :  
такъ



## 78 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

такъ корень  $4x^2$  есть 2, 9 пи 3, 16 пи 4, причеъ примѣчать должно, что сѣи корни какъ съ положительными такъ и съ отрицательными знаками поставлены бытъ могутъ. Такъ изъ 25 пи корень квадратной будетъ какъ  $+5$ , такъ и  $-5$ : потому что  $-5$  умноженные на  $-5$  также дѣлаютъ  $+25$ , какъ и  $+5$  умноженные на  $+5$ .

124.

И такъ когда данное число будетъ квадратъ, и квадратные числа пошуду извѣстны, то легко можно найти его корень квадратной: такъ когда бы данное число было 196, то извѣстно что корень квадратной онаго числа есть 14. Въ дробяхъ также нѣтъ трудности, и изъ прежняго видно, что изъ дроби  $\frac{25}{49}$  корень квадратной есть  $\frac{5}{7}$ , потому что какъ числителя такъ и знаменателя корень квадратной взять можно. Если же данное число будетъ смѣщенное, какъ  $12\frac{1}{4}$ , то приведи оное въ одну дробь, какъ  $\frac{49}{4}$  изъ кошорой корень квадратной

квадратной будетъ  $\frac{7}{2}$  или  $3\frac{1}{2}$ , следовательно онъ же будетъ квадратной корень изъ  $12\frac{1}{4}$ .

125.

А когда данное число будетъ не квадратъ, какъ наприм. 12, то не можно найти или опредѣлить его корня квадратнаго, то есть: такого числа, которое бы само на себя помноженно, точно 12 соспавляло. Между тѣмъ однакожъ намъ извѣстно, что корень квадратной 12ши больше 3хъ, потому что 3. 3 дѣлають только 9, а меньше 4хъ; потому что 4. 4 дѣлають 16; извѣстно также намъ что оно должно быть меньше  $3\frac{1}{2}$ , ибо квадратъ сего числа больше 12, понеже  $3\frac{1}{2}$  или  $\frac{7}{2}$ хъ квадратъ есть  $12\frac{1}{4}$ . Сей корень опредѣлится еще точнѣе положе его  $3\frac{7}{15}$ ; ибо квадратъ сего числа есть  $\frac{2704}{225}$ , следовательно  $3\frac{7}{15}$  еще нѣсколько великъ. Понеже  $3\frac{7}{15}$  или  $\frac{52}{15}$ хъ квадратъ  $\frac{2704}{225}$  или  $12\frac{4}{225}$ .

126.

Когда  $3\frac{1}{2}$  и  $3\frac{7}{15}$  нѣсколько превышаютъ квадратной корень 12ши, то можно

## 80 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

жно думать , что когда мѣсто дроби  $\frac{7}{15}$  другая нѣсколько меньше къ 3 придастся, квадратъ ея 12 произойти можетъ.

И шакъ возьмемъ  $3\frac{3}{7}$  по тому, что  $\frac{3}{7}$  нѣсколько меньше  $\frac{7}{15}$  хъ , а  $3\frac{3}{7}$  равны  $\frac{24}{7}$  , коей квадратъ  $\frac{576}{49}$  или  $11\frac{37}{49}$  ; нѣсколько меньше 12 , ибо 12 приведенные къ тому же знаменателю дѣлаютъ  $\frac{588}{49}$  , слѣдовательно меньше дробью  $\frac{12}{49}$ . Отсюда видимъ мы , что  $3\frac{3}{7}$  малы , а  $3\frac{7}{15}$  велики : чего ради возьмемъ  $3\frac{5}{11}$  , по тому что  $3\frac{5}{11}$  больше  $3\frac{3}{7}$  , а меньше  $3\frac{7}{15}$  ; когда  $3\frac{5}{11}$  въ одну дробь приведенные составляютъ  $\frac{38}{11}$  , то квадратъ отсюда будетъ  $\frac{1444}{121}$  или  $11\frac{118}{121}$ . Но 12 приведенные къ сему же знаменателю дѣлаютъ  $\frac{1452}{121}$  : слѣд  $3\frac{5}{11}$  еще не достаютъ дробью  $\frac{8}{121}$ . Если же бы положили искомой корень  $3\frac{6}{13}$  , по елику  $\frac{6}{13}$  нѣсколько больше  $\frac{5}{11}$  , то квадратъ бы изъ того былъ  $\frac{2025}{169}$  , т. е.  $11\frac{166}{169}$  ; но 12 къ сему знаменателю приведенные даютъ  $\frac{2028}{169}$  , слѣдовательно  $3\frac{6}{13}$  еще малы дробью  $\frac{3}{169}$  , а  $3\frac{7}{15}$  велики.

127.

Но легко понять можно, что какую бы мы дробь къ 3 мѣ ни прикладывали, квадратъ ея всегда будетъ имѣть при себѣ дробь и слѣдовательно 12 ни точно никогда не составитъ. Несмотря на то что мы знаемъ, что корень квадратной изъ 12 больше  $3\frac{6}{13}$ , а меньше  $3\frac{7}{13}$ , должно признаться, что между сими двумя дробями не можно найти такой, которая бы, если бы придалась къ ней 3, точно произвела квадратной корень изъ 12. Между тѣмъ не можно сказать, чтобъ корень квадратной изъ 12 самъ собою опредѣленъ не былъ; а изъ показаннаго слѣдуетъ только, что онаго дробью изъяснить не можно, хотя онъ и опредѣленную величину имѣетъ.

128,

Сіе ведетъ насъ къ новому роду чиселъ, коихъ дробями ни коимъ образомъ изъяснить не можно, хотя они и опредѣленную величину имѣютъ, такъ

Е какъ

какъ мы при квадратномъ корнѣ изъ 12 или видѣли. Сей новой родъ чиселъ называется *неизвлекаемыми числами*, которые въ такомъ случаѣ производящъ, когда надлежитъ искать квадратной корень изъ числа не квадратнаго. Такъ напр. 2 есть число не квадратное, но и корень квадратной изъ 2хъ, или то число, которое само на себя помножено точно 2 производитъ, есть число *неизвлекаемое* (ирраціональное) которые числа называются также и глухими числами, *numeri surdi et irrationales*.

## 129.

Хотя такихъ чиселъ никакою дробью представишь нельзя, однакожъ о величинѣ оныхъ, имѣемъ мы ясное понятіе. Ибо напр. какъ бы квадратной корень 12ши ни сокровенъ казался; однако намъ извѣстно, что онъ есть такое число, которое само на себя умножено точно 12 производитъ: и сего свойства довольно дать намъ о семъ числѣ ясное понятіе; а особливо когда  
мы

мы къ его величинѣ часъ опѣ часу ближе подходить можемъ.

130.

Имѣя о такихъ неизвлекаемыхъ числахъ довольное понятіе употребляющѣ для означенія корня квадратнаго изъ чиселъ не квадратныхъ, знакъ имѣющей фигуру  $\sqrt{\phantom{x}}$ , которой словомъ корень квадратной выговариваютъ, такъ  $\sqrt{12}$  означиваетъ то число, которое если само на себя помножится, произведетъ 12, или корень квадратной изъ 12; равнымъ образомъ  $\sqrt{2}$  показываетъ корень квадратной изъ 2хъ,  $\sqrt{3}$  корень квадратной изъ 3хъ;  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  корень квадратной изъ  $\frac{2}{3}$ , вообще  $\sqrt{a}$  показываетъ корень квадратной изъ  $a$ ; и такъ для означенія корня квадратнаго изъ числа не квадратнаго всегда употребляющѣ сей знакъ  $\sqrt{\phantom{x}}$ , которой пишутъ попереди онаго.

131.

Вышепомянутое понятіе о сихъ неизвлекаемыхъ числахъ, ведетъ насъ на

## 84 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

путь , какимъ образомъ дѣлать употребле-  
 бительные съ оными выкладки. Понеже  
 корень квадратной изъ 2 хъ умноженной  
 самъ собою даетъ 2 , то и изъ  $\sqrt{2}$  ум-  
 ноженного на  $\sqrt{2}$  несумнѣнно произойдетъ  
 2 ; равнымъ образомъ  $\sqrt{3}$  на  $\sqrt{3}$  даетъ 3,  
 $\sqrt{5}$  умноженной на  $\sqrt{5}$  даетъ 5 , также  
 $\sqrt{\frac{2}{3}}$  на  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  даетъ  $\frac{2}{3}$  , и вообще  $\sqrt{a}$  умно-  
 женной на  $\sqrt{a}$  даетъ  $a$ .

132.

Но когда  $\sqrt{a}$  умножится на  $\sqrt{b}$  , то  
 произведеніе будетъ  $\sqrt{ab}$  ; понеже выше  
 упомянуто , что когда квадратное чи-  
 сло имѣетъ множителей , то корень изъ  
 произведенія есть также корень изъ обо-  
 ихъ множителей ; и по сему квадратной  
 корень изъ произведенія  $ab$  получишь ,  
 т. е.  $\sqrt{ab}$  , когда квадратной корень изъ  $a$  ,  
 т. е.  $\sqrt{a}$  умножишь на квадратной корень  
 изъ  $b$  ; т. е.  $\sqrt{b}$  : изъ чего явствуетъ ,  
 что ежели бы  $b$  равно было  $a$  , то бы  $\sqrt{a}$   
 умноженной на  $\sqrt{a}$  произвело  $\sqrt{aa}$  , а  
 $\sqrt{aa}$  безсомнѣнія есть  $a$  , пошому что  $aa$   
 есть квадратъ изъ  $a$ .

## 133.

Равнымъ образомъ когда  $\sqrt{a}$  должно будетъ раздѣлить на  $\sqrt{b}$ , то получится  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ; при чемъ случится можетъ, что въ часномъ числѣ неизвлекаемость пропадетъ; такъ напр. ежели  $\sqrt{18}$  должно будетъ раздѣлить на  $\sqrt{8}$ , то получишь  $\sqrt{\frac{18}{8}}$  но  $\frac{18}{8}$  равны  $\frac{9}{4}$  и корень квадратной изъ  $\frac{9}{4}$ , есть  $\frac{3}{2}$

## 134.

Ежели число предъ которымъ коренной знакъ  $\sqrt{\phantom{x}}$  поставленъ есть квадратъ, то извлечь его можно обыкновеннымъ образомъ. Такъ  $\sqrt{4}$  равенъ 2,  $\sqrt{9}$  равенъ 3,  $\sqrt{36}$  есть 6,  $\sqrt{12\frac{1}{4}}$  есть  $\sqrt{4\frac{9}{4}}$  которой равенъ 2 или  $2\frac{1}{2}$ , въ сихъ случаяхъ неизвлекаемость только быть кажется; а въ самомъ дѣлѣ она пропадаетъ.

## 135.

Такія неизвлекаемыя числа можно легко умножать на обыкновенныя какъ напр. 2ды  $\sqrt{5}$  равенъ  $2\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{2}$  умноженной на 3 даетъ  $3\sqrt{2}$ , но понеже 3

Е 3

равны



равны  $\sqrt{9}$ , то и  $\sqrt{9}$  умноженной на  $\sqrt{2}$  дастъ  $\sqrt{18}$ , такъ чпо  $\sqrt{18}$  равенъ  $3\sqrt{2}$ . Также  $2\sqrt{a}$  равенъ  $\sqrt{4a}$ ,  $3\sqrt{a}$  равенъ  $\sqrt{9a}$  и вообще  $b\sqrt{a}$  равенъ  $\sqrt{b^2a}$ , откуда видно, чпо когда стоящее подъ кореннымъ знакомъ число содержитъ въ себѣ квадратъ, то корень изъ онаго попереди помянутаго знака поставитъ можно, какъ  $b\sqrt{a}$ , такимъ образомъ слѣдующія обращенія будутъ ясны на пр.

$$\sqrt{8} \text{ или } \sqrt{2 \cdot 4} \text{ равенъ } 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} \text{ или } \sqrt{3 \cdot 4} \text{ — — — } 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} \text{ или } \sqrt{2 \cdot 9} \text{ — — — } 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{24} \text{ или } \sqrt{6 \cdot 4} \text{ — — — } 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{32} \text{ или } \sqrt{8 \cdot 4} \text{ — — — } 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{75} \text{ или } \sqrt{3 \cdot 25} \text{ — — — } 5\sqrt{3}.$$

136.

При дѣленіи то же самое наблюдается, ибо  $\sqrt{a}$  раздѣленной на  $\sqrt{b}$  дастъ  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , т. е.  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ , такъ

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \text{ равенъ } \sqrt{\frac{8}{2}}, \text{ или } \sqrt{4} \text{ или } 2$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \text{ равенъ } \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{144}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{144}{6}} \text{ или } \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{6 \cdot 4} \text{ т. е. } 2\sqrt[3]{6}.$$

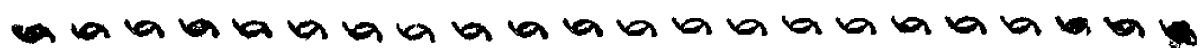
137.

При сложеніи и вычитаніи, нѣтъ ничего особливаго примѣчанія достойнаго, потому что числа соединяются только знаками  $+$  и  $-$ ; какъ напр.  $\sqrt[3]{2}$  сложенной съ  $\sqrt[3]{3}$  дастъ  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ , а изъ  $\sqrt[3]{5}$  вычитенной  $\sqrt[3]{3}$  дастъ  $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}$ .

138.

Наконецъ примѣчать должно, что для различія сихъ такъ называемыхъ неизвлекаемыхъ чиселъ, обыкновенные числа какъ цѣлые такъ и ломаные называются *извлекаемыми* или (раціональными) числами ( *numeri rationales.* )

И такъ когда рѣчь о раціональныхъ числахъ, то всегда подъ тѣмъ разумѣются цѣлыя и ломаные числа.



## ГЛАВА XIII.

О производящихъ изъ сегожъ источника  
не возможныхъ или мнимыхъ числахъ.

139.

Видѣли уже мы, что квадраты какъ изъ положительныхъ такъ и отрица-  
тельныхъ, (прибыточныхъ или убыточ-  
ныхъ) чиселъ, суть всегда положительные  
или съ знакомъ  $+$ ; ибо  $-a$  умноженное  
на  $-a$  даетъ также  $+$   $aa$ , какъ и  $+$   $a$   
умноженное на  $+$   $a$ . Для сей причины  
въ прежней главѣ брали мы числа, изъ  
коихъ квадратной корень извлечь должно,  
за числа положительные.

140.

И такъ ежели случится изъ отри-  
цательнаго числа извлечь корень ква-  
дратной, то конечно должно быть тѣмъ  
великому сомнѣнію, потому что нѣтъ  
никакого такого числа, котораго бы  
квадратъ былъ отрицательное число;  
какъ

какъ напр. когда похочешь имѣть ква-  
 драшной корень числа  $-4$ , по сему чи-  
 слу должно быть шакому, которое бы  
 само собою помножено, произвело  $-4$ ;  
 слѣдовательно искомое число ни  $+2$   
 ни  $-2$  быть не можетъ, ибо какъ  $+2$ ,  
 такъ и  $-2$  помножены будучи сами со-  
 бою въ произведеніи даютъ  $+4$ , а не  $-4$ .

## 141.

Отсюда видно, что корень ква-  
 драшной изъ отрицательнаго числа, ни  
 положительное ни отрицательное число  
 быть не можетъ; пошому что всѣхъ  
 отрицательныхъ чиселъ квадраты суть  
 положительные или съ знакомъ  $+$ , слѣ-  
 довательно искомой корень совсѣмъ осо-  
 бливаго рода быть долженъ, ибо онаго  
 ни къ положительнымъ, ни къ отрица-  
 тельнымъ числамъ причислить не можно.

## 142.

Понеже выше сего уже упомянуто,  
 что всѣ положительныя числа больше  
 нежели 0, напрошивъ того всѣ отрица-  
 тельныя меньше нежели 0; такъ что все,

## 90 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

что больше нежели ничево положительными ; а все что меньше ничево отрицательными числами изъясняется , и такъ видимъ мы , что корни изъ отрицательныхъ чиселъ ни больше ни меньше нежели ничево, и самое ничево они также не будущъ, ибо о умноженной на о въ произведеніи даетъ о, и слѣдовательно не отрицательное число.

143.

Когда всѣ возможные числа , какія только представить можно, суть больше и меньше о или самой о ; то изъ сего видно , что корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ, въ число возможныхъ чиселъ включены быть не могутъ, слѣдовательно суть числа *не возможные*. Сіе обстоятельство ведетъ насъ къ познанію такихъ чиселъ , которыя по ихъ свойству суть не возможные и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что ихъ въ умъ только представить можно.

144.

144.

Чего ради всѣ сїи выраженїя , какъ  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-2}$ ,  $\sqrt{-3}$ ,  $\sqrt{-4}$  и прочая показываютъ такія не возможные или мнимыя числа , ибо чрезъ то означаются корни квадратные изъ отрицательныхъ чиселъ.

И такъ по справедливости можно подтвердить о сихъ числахъ , что они ни больше ни меньше нуля , да и самого нуля не составляютъ ; по чему справедливо почтены быть могутъ за невозможныя.

145.

А поелику они только въ умѣ нашемъ представляются , то для того и называютъ ихъ мнимыми числами . И хотя сїи числа какъ  $\sqrt{-4}$  по свойству ихъ и совсѣмъ невозможныя , то однако имѣемъ мы объ нихъ довольно понятїе , зная что ими означается такое число , которое еслии само на себя помножено будетъ , въ произведенїи дастъ  $-4$  , и сего довольно для знанїя , какъ съ сими  
числами

числами въ выкладкахъ поступать надлежитъ.

146.

И такъ что мы теперь о такихъ не возможныхъ числахъ, какъ  $\sqrt{-3}$ , знаемъ сосланивъ въ томъ, что квадратъ изъ онаго; или произведение изъ  $\sqrt{-3}$  на  $\sqrt{-3}$ , будетъ  $-3$ ; также  $\sqrt{-1}$  умноженной на  $\sqrt{-1}$  дастъ  $-1$ ; и вообще когда  $\sqrt{-a}$  умножится на  $\sqrt{-a}$ , или возмется квадратъ  $\sqrt{-a}$  выйдетъ  $-a$ .

147.

Когда  $-a$  есть то же, что и  $+a$  умноженное на  $-1$ ; а корень квадратной изъ произведенія находится, когда квадратные корни изъ обоихъ множителей на себя помножатся, такъ, будетъ корень изъ  $a$  умноженной на  $-1$ , или корень изъ  $-a$  столько же какъ  $\sqrt{a}$  умноженной на  $\sqrt{-1}$ . Но поелику  $\sqrt{a}$  есть возможное число, слѣдовательно содержащееся въ немъ невозможное всегда приписать можно въ  $\sqrt{-1}$ , и посему будетъ  $\sqrt{-4}$ ; равенъ  $\sqrt{4}$  умноженному на  $\sqrt{-1}$ ;

а  $\sqrt[4]{4}$  есть 2, то  $\sqrt[4]{4}$  равенъ будетъ  $2^{\sqrt[4]{4}-1}$ ;  $\sqrt[4]{9}$  равенъ  $\sqrt[4]{9}$ .  $\sqrt[4]{9}-1$ , то есть  $3^{\sqrt[4]{9}-1}$ ;  $\sqrt[4]{16}$  равенъ  $4^{\sqrt[4]{16}-1}$ .

148.

Когда  $\sqrt[4]{a}$  умноженной на  $\sqrt[4]{b}$  дастъ  $\sqrt[4]{ab}$ ; то  $\sqrt[4]{2}$  умноженной на  $\sqrt[4]{3}$  дастъ  $\sqrt[4]{6}$ : равнымъ образомъ  $\sqrt[4]{4}$  умноженной на  $\sqrt[4]{4}$  дастъ  $\sqrt[4]{4}$ , то есть 2; отсюда видно, что два не возможные числа помноженные сами собою произведутъ возможное или действительное число. Но когда  $\sqrt[4]{3}$  умноженъ будетъ на  $\sqrt[4]{5}$ , то получится  $\sqrt[4]{15}$ , или возможное число помноженное на не возможное, всегда не возможное произведетъ.

149.

Подобнымъ образомъ и въ дѣленіи поступать надлежитъ; ибо когда  $\sqrt[4]{a}$  раздѣленной на  $\sqrt[4]{b}$  дастъ  $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ ; то  $\sqrt[4]{5}$  раздѣленной на  $\sqrt[4]{1}$  дастъ  $\sqrt[4]{5}$ ;  $\sqrt[4]{3}$  раздѣленной на  $\sqrt[4]{3}$  дастъ въ частномъ числѣ  $\sqrt[4]{1}$ ; а 1 раздѣленная на  $\sqrt[4]{1}$  дастъ



## 94 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

дасть  $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ , т е.  $\sqrt{-1}$ , потому что 1 то же что и  $\sqrt{+1}$ .

150.

Когда справедливо вышепомянутое примѣчаніе, что cadaго числа квадратной корень имѣетъ двоякую силу, то есть: что оной какъ съ положительнымъ такъ и съ отрицательнымъ знакомъ взятъ быть можетъ, какъ напр.  $\sqrt{4}$  есть какъ  $+2$ , такъ и  $-2$ , и вообще вмѣсто квадратнаго корня изъ  $a$  можно писать какъ  $+\sqrt{a}$ , такъ и  $-\sqrt{a}$ ; то будетъ оно также имѣть мѣсто и при невозможныхъ числахъ, и корень квадратной изъ  $-a$  будетъ, какъ  $+\sqrt{-a}$  такъ и  $-\sqrt{-a}$ , при чемъ знаки  $+$  и  $-$ , которые попереди знака  $\sqrt$  становящяся отличать должно отъ тѣхъ, кои стоятъ подъ знакомъ  $\sqrt$ .

1, 1.

Наконецъ еще сомнѣніе разрѣшить надлежитъ, которое состоитъ въ томъ, когда такія числа суть невозможны, по кажется что они совсѣмъ не нужны, и  
ученіе

ученіе сіе за самую малость почестъ можно. Не смотря на сіе оно въ самомъ дѣлѣ весьма нужно, ибо очень часто случающіяся такія вопросы, о копорыхъ скоро узнать не лзя возможные ли они или не возможные? а когда рѣшеніе ихъ приведемъ насъ на такія числа невозможныя, то сіе значить будетъ, что и самой вопросъ не возможенъ. Для изъясненія сего примѣромъ рассмотримъ слѣдующей вопросъ : данное число 12 раздѣлить на двѣ такія части, копорыхъ бы произведение было 40? Сей вопросъ когда по предписаннымъ въ слѣдующихъ правиламъ рѣшить будемъ, то найдемъ для двухъ искомыхъ частей  $6 + \sqrt{-4}$ , и  $6 - \sqrt{-4}$ , копорыя слѣдовательно суть не возможныя; и такъ изъ сего видно, что вопроса сего рѣшить не можно.

Еслили же бы должно было число 12 раздѣлить на такія двѣ части; копорыя бы въ произведеніи дали 35; то сіи части были бы безъ сомнѣнія 7 и 5.



## ГЛАВА XIV.

О кубическихъ числахъ.

Когда какое нибудь число трижды само на себя, или его квадратъ еще на самое число помножится, то произведеніе называется *кубъ* или *кубическое число*; такъ числа  $a$  кубъ будетъ  $aaa$ , которое происходитъ отъ умноженія числа  $a$  на самого себя, то есть на  $a$ , а квадратъ его  $aa$  еще на число  $a$ .

И такъ кубы натуральныхъ чиселъ суть слѣдующія :

Числа : 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Кубы : 1, 8, 27, 64, 125, 216,

Числа : 7, 8, 9, 10,

Кубы : 343, 512, 729, 1000,

И такъ далѣе.

153.

Когда мы при сихъ кубическихъ числахъ рассмотримъ ихъ разности, такъ какъ и при квадратныхъ числахъ учинено было, вычисляя каждый изъ слѣдующаго, то

то получится слѣдующей рядъ чиселъ :  
7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;  
между копорыми не видно никакого  
порядка; естли же мы еще сихъ чиселъ  
возмемъ разности , то получится слѣ-  
дующей рядъ 12, 18, 24, 30, 36, 42,  
48, 54, между которыми всѣми одна раз-  
ность 6.

154.

Равнымъ образомъ находить безъ  
трудности можно кубы дробей ; такъ  
напр.  $\frac{1}{2}$  кубъ есть  $\frac{1}{8}$  ;  $\frac{1}{3}$  кубъ будетъ  $\frac{1}{27}$  ;  
 $\frac{2}{3}$  ,  $\frac{8}{27}$  . Надлежитъ шолько какъ числителя  
такъ и знаменателя взять кубы порознь ;  
такъ дроби  $\frac{3}{4}$  кубъ будетъ  $\frac{27}{64}$  .

155.

Чтобы найти кубъ смѣшеннаго чи-  
сла , надлежитъ его сперва привести въ  
одну дробь ; а попомъ численіе здѣлать  
будетъ не трудно. Такъ числа  $1\frac{1}{2}$  кубъ  
легко найти можно ; ибо  $1\frac{1}{2}$  приведенные въ  
одну дробь равны  $\frac{3}{2}$  , а кубъ  $\frac{3}{2}$  равенъ  $\frac{27}{8}$  ,  
шо есть 3 и  $\frac{3}{8}$  : равнымъ образомъ числа

## 98 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

$1\frac{1}{4}$  или  $\frac{5}{4}$  кубъ есть  $\frac{125}{64}$ , то есть 1 и  $\frac{61}{64}$ ,  
а числа  $3\frac{1}{4}$  или  $\frac{13}{4}$  кубъ  $\frac{2197}{64}$ , то есть  $34\frac{21}{64}$ .

156.

Понеже числа а кубъ ааа, то числа  
ав будетъ кубъ ааааааааа, изъ чего видно,  
что когда число имѣетъ два или больше  
множителей, то кубъ онаго выдетъ,  
если кубы каждаго множителя помно-  
жатся между собою; такъ напр. понеже  
12 равны 3.4, то помножь кубъ 3хъ ко-  
торой есть 27, на кубъ 4хъ, которой  
есть 64, и получишь 1728 кубъ числа  
12. Отсюда видно также, что кубъ 2а  
долженъ быть 8ааа, слѣдовательно въ 8  
разъ больше куба изъ а; равнымъ обра-  
зомъ кубъ 3а есть 27 ааа, т. е. въ 27  
разъ больше нежели кубъ изъ а.

157.

Что касается до знаковъ + и -,  
то ясно само по себѣ, что числа поло-  
жительнаго, какъ +а, кубъ будетъ также  
+ааа положительной, а числа отрицатель-  
наго какъ -а будетъ и кубъ отрица-  
тельной; ибо возми сперва квадратъ -а;  
которо

которой есть  $+аа$ , и помножь его на  $-а$ , по получится искомой кубъ  $-ааа$ , числа  $-а$ , слѣдовательно съ кубами совсѣмъ проотивное бываетъ нежели съ квадратами, ибо сѣи послѣдніе всегда бывающъ положительныя; напротивъ того  $-1$  кубъ есть  $-1$ ;  $-2$  хъ кубъ  $-8$ ;  $-3$  хъ кубъ  $-27$ , и такъ далѣе.



## ГЛАВА XV.

О кубичныхъ корняхъ, и производящихъ опшуда неизвлекаемыхъ числахъ.

158.

Показавъ какимъ образомъ даннаго числа находить кубъ, можно обратно изъ даннаго числа находить такое число, которое бы 3жды само на себя помноженное произвело данное число; и сѣ найденное число въ сравненіи съ даннымъ, называется его *кубичнымъ корнемъ*. слѣдовательно даннаго числа кубичной корень есть такое число, котораго кубъ равенъ данному числу.

Ж 2

159.

И такъ когда данное число есть дѣйствительно такое кубическое число, какое мы въ прежней главѣ находили, то легко найсти можно его кубичной корень. Какъ напр. кубичной корень изъ 1 есть 1, изъ 8, 2, изъ 27, 3, изъ 64хъ 4, и такъ далѣе.

Равнымъ образомъ изъ -27 кубичной корень есть -3, изъ -125, -5. Ежели данное число будетъ ломаное, какъ  $\frac{1}{27}$ , то кубичной его корень будетъ  $\frac{1}{3}$ , изъ  $\frac{64}{543}$  есть  $\frac{4}{7}$ , сверхъ сего когда данное число будетъ смѣшенное, какъ  $2\frac{10}{27}$ , которое приведено будучи въ одну дробь дѣлаетъ  $\frac{64}{27}$ , слѣдовательно кубичной его корень будетъ  $\frac{4}{3}$ , т. е.  $1\frac{1}{3}$ .

Еслили же данное число будетъ не точной кубъ, то и корня его кубическаго ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъяснить не можно. Такъ напр. 43 поелику число не кубическое, то ни въ цѣлыхъ

цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ не можно показать такого числа, котораго бы кубъ составлялъ точно 43. Между тѣмъ однако намъ извѣстно, что корень онаго числа больше 3 хъ, а меньше 4 хъ; потому что кубъ 3 хъ дѣлаетъ только 27. т. е. меньше 43; а кубъ 4 есть 64 больше 43, слѣдовательно знаемъ мы, что искомому кубичному корню числа 43, содержащяся должно между числами 3 и 4.

161.

Ежели бы мы захотѣли теперь къ 3 мъ придать еще дробь, для того что кубичной корень 43 хъ больше 3 хъ, то можно бы къ правдѣ подойти ближе; а поелику кубъ такого числа всегда содержащъ будещъ въ себѣ дробь, того ради не можно ему быть никогда 43; положимъ напр. искомой кубичной корень  $3\frac{1}{2}$  или  $\frac{7}{2}$ , то кубъ его  $\frac{343}{8}$  или  $42\frac{7}{8}$  хъ, слѣдовательно  $\frac{343}{8}$  меньше 43 хъ.



Отсюда видно, что корня кубичнаго изъ 43 хъ ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъяснить нельзя; а имѣя ясное понятіе о величинѣ его, употребляющъ для означенія онаго знакъ  $\sqrt[3]{}$ , которой ставящъ предъ даннымъ числомъ и для различія отъ корня квадратнаго выговаривающъ словомъ корень кубичной. Такъ напр.  $\sqrt[3]{43}$  означаетъ корень кубичной изъ 43, т. е. такое число, котораго кубъ есть 43, или которое 3ды само собою помноженное 43 производитъ.

Изъ сего видно, что такія выраженія не принадлежатъ къ извлекаемымъ числамъ, но особой родъ неизвлекаемыхъ составляющъ. Съ квадратнымъ корнемъ не имѣющъ они никакого сообщенія, да и не возможно такого кубичнаго корня никакимъ квадратнымъ, какъ  $\sqrt{12}$ , изобразишь: ибо когда квадратъ  $\sqrt{12}$  есть 12, то кубъ онаго будетъ

$12\sqrt[3]{12}$ ; слѣдовательно еще неизвлекаемое число и  $43$  сослѣдовать не можетъ.

164.

А ежели данное число есть действительной кубъ, то и выраженія сѣи будутъ извлекаемыя, такъ  $\sqrt[3]{1}$  равенъ  $1$ ;  $\sqrt[3]{8}$  равенъ  $2$ , а  $\sqrt[3]{27}$  равенъ  $3$ , и вообще  $\sqrt[3]{aaa}$  равенъ  $a$ .

165.

Когда кубичной корень, какъ  $\sqrt[3]{a}$ , должно будетъ помножить на другой, какъ  $\sqrt[3]{b}$ , то произведеніе будетъ  $\sqrt[3]{ab}$ : понеже намъ извѣстно, что корень кубичной изъ произведенія  $ab$  выходитъ, изъ умноженія обоихъ кубичныхъ корней множителей. Равнымъ образомъ, когда  $\sqrt[3]{a}$  должно будетъ раздѣлить на  $\sqrt[3]{b}$ , въ частномъ числѣ будетъ  $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ .

166.

Отсюда легко понять можно, что  $2\sqrt[3]{a}$  столько же дѣлаетъ какъ и  $\sqrt[3]{8a}$ , потому что  $2$  столько же, какъ и  $\sqrt[3]{8}$ . рав-

Ж 4

нымъ

нымъ образомъ  $3\sqrt[3]{a}$  равенъ  $\sqrt[3]{27a}$ , и  $b\sqrt[3]{a}$  равенъ  $\sqrt[3]{abbb}$ . Также и обратно когда число подъ знакомъ стоящее имѣетъ множителемъ кубичное число, то корень кубичной онаго можно поставить попереди знака, такъ напр.  $\sqrt[3]{64a}$ , тоже что и  $4\sqrt[3]{a}$ .  $\sqrt[3]{125a}$ , тоже что и  $5\sqrt[3]{a}$ , слѣдовательно  $\sqrt[3]{16}$  тоже что  $2\sqrt[3]{2}$  пошому что 16 равны 8. 2.

## 167.

Когда данное число будетъ отрицательное, то при кубичномъ корнѣ нѣтъ такихъ затрудненій, какіе при квадратномъ выше сего мы имѣли; пошому что кубы отрицательныхъ чиселъ суть также отрицательные, и слѣдовательно кубичные корни чиселъ отрицательныхъ будутъ также отрицательные, какъ напр.  $\sqrt[3]{-8} = -2$ ,  $\sqrt[3]{-27} = -3$ , также  $\sqrt[3]{-12}$  равенъ  $-\sqrt[3]{12}$ , и  $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ ; изъ чего видно, что знакъ — какъ позади, такъ попереди кореннаго знака кубичнаго писать можно. И такъ здѣсь не имѣемъ мы невозможныхъ, или мнимыхъ чиселъ,

чиселъ , какъ то было при квадратныхъ корняхъ отрицательныхъ чиселъ.



## ГЛАВА XVI.

о степеняхъ вообще.

Когда какое число многажды само собою помножается, то происходящее отсюда произведеніе вообще *потенцею* или *степенью* называется.

Понеже квадратъ происходитъ отъ умноженія какого нибудь числа самого на себя однажды, а кубъ отъ умноженія самого жъ собою дважды : то какъ квадраты , такъ и кубы подъ именемъ *потенцій*, ш. е. степеней разумѣть должно.

169.

Сїи степени различаются по числу, сколько разъ одно какое нибудь число само на себя помножается ; такъ напр. когда какое нибудь число однажды само собою помножится , то сїе произведеніе называется *вторая степень* , которая

Ж 5

тоже

тоже значитъ что и квадратъ того числа ; а когда число дважды само собою помножится , то сіе произведеніе *третья степень* называется , которая одинакое знаменованіе съ кубомъ имѣетъ ; когда же число 3 ды само собою помножится : то произведеніе сіе 4 тою *степенью* такожде и *биквадратомъ* называется. Отсюда разумѣется что будетъ 5тая , 6тая , и 7мая степень какого нибудь числа , которые вышшими степенями именуются , а особливаго имени не имѣютъ.

170.

Зная , что 1цы всѣ степени  $= 1$  , потому что сколько бы разъ 1 саму собою ни помножали , въ произведеніи всегда выходитъ 1. Для изъясненія вышеобъявленнаго поставимъ теперь по порядку всѣ степени чиселъ 2 и 3хъ , которые слѣдующимъ образомъ идутъ.

Степени.

| степе-<br>ни. | числа<br>2 хъ. | ч и с л а<br>3 хъ |                                                               |
|---------------|----------------|-------------------|---------------------------------------------------------------|
| I.            | 2              | 3                 |                                                               |
| II.           | 4              | 9                 | Особливо примѣчанія                                           |
| III.          | 8              | 27                | достойны степени                                              |
| IV.           | 16             | 81                | числа 10, какъ 10 <sup>I</sup> ,                              |
| V.            | 32             | 243               | 100 <sup>II</sup> , 1000 <sup>III</sup> , 10000 <sup>IV</sup> |
| VI.           | 64             | 729               | 100000 <sup>V</sup> , 1000000 <sup>VI</sup> ,                 |
| VII.          | 128            | 2187              | потому что на нихъ                                            |
| VIII.         | 256            | 6561              | вся ариѳметика ос-                                            |
| VIII.         | 512            | 19683             | нована; при семъ при-                                         |
| X.            | 1024           | 59049             | мѣчать надлежитъ                                              |
| XI.           | 2048           | 177147            | что только на верь-                                           |
| XII.          | 4096           | 531441            | ху поставленные чи-                                           |
| XIII.         | 8192           | 1594323           | сла, означають до ка-                                         |
| XIV.          | 16384          | 4782969           | кой степени каждое                                            |
| XV.           | 32768          | 14348907          | число возвышено.                                              |
| XVI.          | 65536          | 43046721          |                                                               |
| XVII.         | 131072         | 129140163         |                                                               |
| XVIII.        | 262144         | 387420489         |                                                               |

171.

Ежели мы о семъ вообще раз-  
суждать станемъ, то степени числа  
а найдутся слѣдующіе, какъ : а  
II III IV V VI, и такъ да-  
ва , ааа , аааа , ааааа , аааааа , и такъ да-  
лѣе ; но такимъ образомъ степени пи-  
сать не способно ; ибо когда бы выш-  
шія степени изъяснить потребно было ,  
тобъ

тобѣ ту же самую букву многожды въ рядѣ писать надлежало , да и для читателя было бы такожде скучно писать множество такихъ буквъ , дабы узнать , какая чрезъ то степень означается, такъ напр. сотую степень симъ образомъ изъяснить весьма бы трудно было , а еще труднее узнать оную.

## 172.

Для избѣжанія такихъ неспособностей въ изъясненіе степеней найденъ удобнѣйшій способъ , которой для великой своей пользы достоинъ исполкованія , а именно : надъ тѣмъ числомъ , которое напр. сотую степень показывать должно , пишуъ нѣсколько вкось къ правой рукѣ число 100 : такъ напр.  $a^{100}$  и выговаривается : *a* возвышенное до 100 , чрезъ что сотая степень *a* разумѣется , и въ верху написанное число какъ въ нашемъ примѣрѣ 100 , показателемъ стелени называютъ , которыя имена примѣчать надлежитъ.

173.

И такъ  $a^2$ , или  $a$  возвышенное до 2 хъ показываетъ вторую степень числа  $a$ , и пишется иногда мѣсто  $aa$ , для того что оба способа писать и разумѣть легко можно. Напротивъ того мѣсто куба или третьей степени  $aaa$  обыкновенно пишутъ  $a^3$ , для того чтобъ больше мѣста оспалось; равнымъ образомъ  $a^4$  показываетъ четвертую степень,  $a^5$  пятую,  $a^6$  шестую и проч.

174.

По сему способу всѣ степени буквы  $a$  слѣдующимъ образомъ представляются: какъ  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$ ,  $a^5$ ,  $a^6$ ,  $a^7$ ,  $a^8$ ,  $a^9$  и пр. откуда видно, что симъ способомъ мѣсто  $a$  удобно можно бы писать  $a^1$ , дабы порядокъ пѣмъ яснѣе представить, понеже  $a$  не иное что есть какъ  $a$ , и единица показываетъ что букву  $a$  однажды написать должно: такой порядокъ обыкновенно называютъ прогрессею Геометрическою, ибо каждой въ ней послѣдующей



110 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ  
дующей членъ , равно превосходитъ  
свой предвдущей.

175.

Въ семъ ряду каждой членъ най-  
дется , когда его предвдущей на  $a$  по-  
множится , чрезъ что показатель един-  
ницею увеличится : такъ изъ каждого  
члена найдется его предвдущей , когда  
онъ раздѣлится на  $a$  , чрезъ что ука-  
затель уменьшится единицею. Отсюда  
видимъ мы , что предъ  $a^1$  стоящей  
членъ долженъ быть  $\frac{a}{a}$  т. е. 1 , а съ по-  
казателемъ  $a^0$  ; изъ чего сіе свойство  
чиселъ слѣдуетъ , что  $a^0$  всегда должно  
быть 1 , какъ бы число  $a$  велико или  
мало ни было , да хотя бы  $a$  и 0 равно  
было , пошому что  $0^0$  безъ сомнѣнія  
дѣлается 1.

176.

Сей рядъ степеней можно назадъ  
продолжать двоякимъ образомъ ; первое  
раздѣляя каждой членъ на  $a$  , второе  
уменьшая указателя единицею, или 1 изъ  
него

него вычисляя. Намъ заподлинно извѣ-  
стно , что въ обоихъ сихъ случаяхъ  
члены совершенно равны между собою  
будущъ ; и такъ сей вышепомянутый  
рядъ посему двойному образу пред-  
ставимъ

$$\begin{array}{l} \frac{1}{aaaaaa} , \frac{1}{aaaaa} , \frac{1}{aaaa} , \frac{1}{aaa} , \frac{1}{aa} , \frac{1}{a} , \frac{1}{1} , a \\ \text{первой} \quad a^6 , a^5 , a^4 , a^3 , a^2 , a , a^0 , a \\ \text{второй} \quad a^{-6} , a^{-5} , a^{-4} , a^{-3} , a^{-2} , a^{-1} , a^0 , a \end{array}$$

Что надлежитъ читать назадъ  
отъ правой руки къ лѣвой.

177.

Чрезъ сіе доходимъ мы къ позна-  
нію такихъ степеней , которыхъ пока-  
затели числа отрицательные ; и можемъ  
опредѣлить точную ихъ величину :  
такъ преденайденное представится слѣ-  
дующимъ образомъ , въ первыхъ  $a^0 = 1$ ,  
 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ,  $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ,  $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$  и такъ далѣе.

178.

Изъ сего явствуетъ , какимъ обра-  
зомъ находить должно степени произ-  
веденія

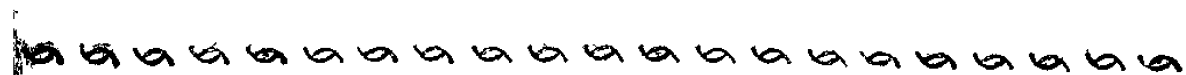
## 112 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

веденія  $ab$ ; оныя суть слѣдующіе:  $ab$  или  $a^1b^1$ ,  $a^2b^2$ ,  $a^3b^3$ ,  $a^4b^4$ ,  $a^5b^5$ ,  $a^6b^6$ , и проч. равнымъ образомъ находятся степени и дробей; напр.  $\frac{a}{b}$  суть слѣдующіе  $\frac{a^1}{b^1}$ ,  $\frac{a^2}{b^2}$ ,  $\frac{a^3}{b^3}$ ,  $\frac{a^4}{b^4}$ ,  $\frac{a^5}{b^5}$ ,  $\frac{a^6}{b^6}$ , и прочая.

179.

Напоследокъ надлежитъ здѣсь рассмотреть, также степени отрицательныхъ чиселъ. Положимъ данное отрицательное число  $-a$ , то степени онаго будутъ  $-a$ ,  $+aa$ ,  $-a^3$ ,  $+a^4$ ,  $-a^5$ ,  $+a^6$ ,  $-a^7$ ,  $+a^8$ , и пр. откуда явствуетъ, что имѣются только степени будутъ отрицательные, которыхъ показатели суть числа нечетныя; напротивъ того всѣ тѣ степени будутъ положительныя, которыхъ показатели суть четныя числа. Такъ степени 3я, 5я, 7я, имѣютъ знакъ  $-$ ; а 2я, 4я, 6я, 8я, имѣютъ знакъ  $+$ .

---



## ГЛАВА XVII.

О численіяхъ со степенями.

180.

Въ разсужденіи сложенія и вычитанія нѣмѣ здѣсь ничего примѣчанія достойнаго, потому что разные степени связываются только знаками  $+$  и  $-$ , такъ напр.  $a^3 + a^2$ , есть сумма 3 шей и 2 рой степени буквы  $a$ ,  $a^5 - a^4$  есть остатокъ четвертой степени вычитенной изъ 5 той, чего короче представить нельзя. А ежели случатся одинакіе степени, то вмѣсто  $a^3 + a^3$  пишутъ  $2a^3$  и такъ далѣе.

181.

Но при умноженіи такихъ степеней примѣчать надлежитъ во первыхъ, когда каждую степень буквы  $a$  помножитъ должно самымъ  $a$ , то произойдетъ такая степень, у которой показатель единицею больше, такъ наприм.  $a^2$  умноженной на  $a$  даетъ  $a^3$ , а  $a^3$  умноженной на  $a$  даетъ  $a^4$  и проч. тожъ бываетъ и

съ тѣми степенями , которыхъ показатели отрицательные, ежели оные помножатся на  $a$ , то къ показателю придается единица. Такъ  $a^{-1}$  умноженное на  $a$  даетъ  $a^0$ , то есть 1 цу, что изъ сего явствуетъ : понеже  $a^{-1}$  равно  $\frac{1}{a}$ ; а  $\frac{1}{a}$  умноженная на  $a$  даетъ  $\frac{a}{a}$ ; т. е. 1 цу; то же самое бываетъ и съ  $a^{-2}$ , ежели оное помножишь на  $a$ , то произойдетъ  $a^{-1}$ , то есть  $\frac{1}{a}$ , и  $a^{-1}$  умноженное на  $a$  даетъ  $a^0$  и такъ далѣе.

182.

Но ежели степень умножишь на  $aa$ , или на вторую степень, то показатель будетъ 2мя больше; такъ  $a^2$  умноженной на  $a^2$  даетъ  $a^4$ ;  $a^3$  умноженной на  $a^2$  даетъ  $a^5$ ;  $a^4$  помноженное на  $a^2$  даетъ  $a^6$  и вообще  $a^n$  умноженное на  $a^2$  даетъ  $a^{n+2}$ . Сіе же самое бываетъ и съ отрицательными показателями, какъ то  $a^{-1}$  умноженное на  $a^2$  даетъ  $a^1$ , т. е.  $a$ , по тому что  $a^{-1}$  есть  $\frac{1}{a}$ , которое когда на  $aa$  помножится даетъ  $\frac{aa}{a}$ , т. е.  $a$ , также  $a^{-2}$  умноженное на  $a^2$  даетъ  $a^0$ , т. е. 1 цу,  $a^{-3}$  умноженное на  $a^2$  даетъ  $a^{-1}$ .

. 183.

183.

То же самое бываетъ, когда каждую степень умножишь на 3 ю степень буквы  $a$ , или на  $a^3$ , тогда показатель оныхъ увеличится прѣмъ; такъ  $a^n$  умноженное на  $a^3$  даетъ  $a^{n+3}$ , и вообще ежели двѣ степени буквы  $a$  помножатся между собою, то произведеніе будетъ степень буквы  $a$ , которая показатель есть сумма оныхъ показателей; такъ  $a^4$  умноженное на  $a^5$  даетъ  $a^9$ , а  $a^{12}$  умноженное на  $a^7$  даетъ  $a^{19}$  и такъ далѣе.

184.

По сему основанію легко можно находить вышшія степени опредѣленныхъ чиселъ; такъ напр. когда пожелаешь знать 24-тую степень числа 2хъ, то получишь оную, ежели 12-тую степень умножишь 12-тою; ибо  $2^{24}$  не иное что есть, какъ  $2^{12}$  умноженное на  $2^{12}$ , а  $2^{12}$  какъ мы выше сего видѣли, есть 4096, то умножь 4096 на 4096, въ произведеніи будетъ 16777216 искомая степень, т. е.  $2^{24}$ .

185.

При дѣленіи слѣдующее примѣчать должно, ежели степень литеры  $a$  раздѣлится должно на  $a$ , то показатель оная цѣю уменьшается, или надлежитъ отъ онаго отнять 1; такъ напр.  $a^5$  раздѣленное на  $a$  даетъ  $a^4$ ;  $a^0$  т. е. 1 раздѣленная на  $a$  даетъ  $a^{-1}$  или  $\frac{1}{a}$ ;  $a^{-3}$  раздѣленное на  $a$  даетъ  $a^{-4}$ .

186.

Ежели же степень литеры  $a$  раздѣлится должно будетъ на  $a^2$ , то отъ показателя оной степени надлежитъ отнять 2; а когда пожелаешь оную раздѣлить на  $a^3$ , то должно отъ показателя оной отнять 3; и вообще какую бы степень литеры  $a$  на другую раздѣлить ни надлежало, то всегда отъ показателя первой степени, отнимать надлежитъ показателя второй степени; такъ напр.  $a^{15}$  раздѣленное на  $a^2$  даетъ  $a^3$ ;  $a^6$  раздѣленное на  $a^2$  даетъ  $a^4$ , также и  $a^{-3}$  раздѣленное на  $a^2$  даетъ  $a^{-5}$ .

187.

187.

Изъ сего легко понять можно, какимъ образомъ степень степеней находить; потому что дѣлается сѣ чрезъ умноженіе; такъ на прим. ежели похочешь найши 2ю степень или квадрапъ буквы  $a^3$ , то будетъ она  $a^6$ ; а 3я степень или кубъ буквы  $a^4$  будетъ  $a^{12}$ ; откуда явствуетъ, что для сысканія квадраша какой либо степени, надлежитъ только ея показателя удвоить; такъ на прим. изъ  $a^n$  квадрапъ есть  $a^{2n}$ ; а кубъ или 3я степень буквы  $a^n$  будетъ  $a^{3n}$ , такимъ же образомъ и 7мая степень буквы  $a^n$  будетъ  $a^{7n}$  и такъ далѣе.

188.

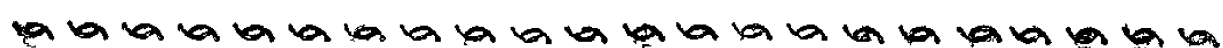
Понеже квадрапъ изъ  $a^2$  есть  $a^4$ , то есть: четвертая степень числа  $a$ , которая будетъ квадрапъ квадраша; откуда явствуетъ для чего 4ю степень *биквадратомъ* или *квадратоквадратомъ* называютъ.

Понеже квадрапъ изъ  $a^3$  есть  $a^6$ , то обыкновенно называютъ 6шую степень *квадратокубомъ*.



## 118. О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

Наконецъ когда кубъ изъ  $a^3$  есть  $a^9$  то есть: 9 я степень буквы  $a$ ; чего ради оную именуютъ *кубокубомъ*, другихъ же имянъ нынѣ больше нѣтъ въ употребленіи.



## ГЛАВА XVIII.

о корняхъ всѣхъ степеней.

189.

Понеже даннаго числа корень квадратной есть такое число, котораго квадратъ равенъ данному числу; а корень кубической есть такое число, котораго кубъ равенъ тому же данному числу, то и каждаго даннаго числа такой корень найсти можно, котораго 4 я или 5 я или какая нибудь по изволенію взятая степень равна будетъ данному числу; для различія сихъ разныхъ родовъ корней между собою, назовемъ квадратной корень вторымъ, а кубической прешлымъ корнемъ; тѣ же корни, которыхъ 4 я

сте-

степень равна данному числу назовемъ  
4-тыми , а тѣхъ 5-тая степень ра-  
вна данному же числу пятыми кор-  
нями именовать будемъ и такъ далѣе.

190.

Когда второй или квадратной ко-  
рень знакомъ  $\sqrt{\phantom{x}}$  , а третьей или кубичной  
черезъ  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  означающа , то равнымъ обра-  
зомъ 4-той корень знакомъ  $\sqrt[4]{\phantom{x}}$  а пятой  
черезъ  $\sqrt[5]{\phantom{x}}$  и такъ далѣе изъясняются ; от-  
куда явствуетъ , что знакъ квадратнаго  
корня по сему способу изображать над-  
лежало бы такъ  $\sqrt[2]{\phantom{x}}$  , но понеже квадра-  
тные корни всѣхъ чаще случаются , то  
для краткости число 2 надъ кореннымъ  
знакомъ не сдѣлано . И по сему когда  
надъ кореннымъ знакомъ никакого числа  
не находится , то должно чрезъ то  
всегда разумѣть квадратной корень.

191.

Дабы сѣ представить вразумитель-  
нѣе , то хошимъ мы изобразить разные  
корни числа  $a$  и покажемъ ихъ знаме-  
нованія:

3 4

$\sqrt[3]{a}$

## 120 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

$\sqrt{a}$  есть второй корень числа  $a$ , котораго 2я степень равна сам.  $a$

$\sqrt[3]{a}$  --- третей ---  $a$  --- 3ья ---

$\sqrt[4]{a}$  --- четвер. ---  $a$  --- 4ая ---

$\sqrt[5]{a}$  --- пятой ---  $a$  --- 5ая ---

$\sqrt[6]{a}$  --- шестой ---  $a$  --- 6ая ---

### 192.

Сколь бы велико или мало число  $a$  ни было, по легко понять можно, какимъ образомъ надлежитъ разумѣть всѣ корни изъ разныхъ сихъ степеней.

При чемъ должно примѣчать, что ежели вмѣсто  $a$  возмется 1ца, то всѣ сіи корни равны будутъ 1цѣ, потому что всѣ степени изъ 1цы, равны всегда 1цѣ.

Но когда число  $a$  будетъ больше 1цы, то и корни всѣ будутъ больше 1цы.

Еслили же сіе число меньше 1цы, то и корни всѣ меньше 1цы.

### 193.

Когда число  $a$  будетъ положительное, по легко разумѣть можно изъ того, что выше о квадратныхъ и кубическихъ корняхъ сказано; т. е. что всѣ прочіе корни завсегда дѣйствительно из-  
явлены

явлены быть могутъ и слѣдовательно дѣйствительныя и возможные суть числа.

буде же число  $a$  отрицательное, по второй, четвертой, шестой и вообще всѣ четные корни будутъ числа невозможныя; по тому что всѣ четныя степени, какъ положительныхъ такъ и отрицательныхъ чиселъ, имѣютъ всегда знакъ  $+$ .

Напротивъ того 3ей, 5той, 7мой и вообще всѣ нечетныя корни будутъ отрицательные, для того что нечетныя степени отрицательныхъ чиселъ, суть также отрицательные.

194.

И такъ отсюда получаемъ мы безконечное множество новыхъ родовъ неизвлекаемыхъ или глухихъ чиселъ; ибо какъ скоро число  $a$  не будетъ дѣйствительная такая степень, которую показываетъ корень, то и не возможно сихъ корней извлечь ни въ цѣлыхъ ниже въ ломаныхъ числахъ; слѣдовательно надлежатъ оныя до рода чиселъ, кои неизвлекаемыми именуются.



## ГЛАВА ХІХ.

О извѣявленіи неизвлекаемыхъ чиселъ , въ  
ломаныхъ показателяхъ.

195.

Въ послѣдней главѣ о степеняхъ показали мы , что квадратъ каждой степени найдется , когда ея показателя удвоишь , и что вообще квадратъ или вѣпорая степень числа  $a^n$  будетъ  $a^{2n}$ ; по чему изъ степени  $a^{2n}$  квадратной корень есть  $a^n$  , и слѣдовательно оной найдется , когда показателя степени возмешь половину или оной раздѣлишь на 2.

196.

И такъ изъ  $a^2$  корень квадратной есть  $a^1$  ; изъ  $a^4$  квадратной корень  $a^2$  , изъ  $a^6$  квадратное коренное число есть  $a^3$  и такъ далѣе.

Когда теперь сіе вообще справедливо , то явствуешь , что корень квадратной числа  $a^3$  найдется  $a^{\frac{3}{2}}$  , подобнымъ образомъ изъ  $a^5$  будетъ квадратной корень

рень  $a^{\frac{5}{2}}$  ; слѣдовательно самого числа  $a$  или  $a^1$  будетъ квадратное коренное число  $a^{\frac{1}{2}}$ , откуда видно , что  $a^{\frac{1}{2}}$  то же самое есть, что и  $\sqrt{a}$  и сей новой способъ извѣявлять квадратные корни надлежитъ примѣчать.

197.

Мы показали также , что кубъ какойнибудь степени  $a^n$  найдется , ежели ея показатель умножится на 3, и по сему кубъ ея будетъ  $a^{3n}$ .

Когда теперь на изворотъ изъ данной степени  $a^{3n}$  претей или кубичной корень найти должно , то будетъ оной  $a^n$ . или показателя степени надлежитъ только раздѣлить на 3 , такъ изъ  $a^3$  будетъ кубичной корень  $a^1$  или  $a$  , изъ  $a^6$  будетъ оной  $a^2$  , изъ  $a^9$  получится  $a^3$  и такъ далѣе.

198.

Сіе и въ томъ случаѣ справедливо , когда показатель раздѣлился на 3 не можетъ ; и по сему изъ  $a^2$  будетъ корень

рень кубичной  $a^{\frac{2}{3}}$ , изъ  $a^4$  получится оной  $a^{\frac{4}{3}}$  или  $a^{1\frac{1}{3}}$ ; слѣдовательно и самаго числа  $a$  или  $a^1$  третьей или кубичной корень будетъ  $a^{\frac{1}{3}}$ , откуда явствуется, что  $a^{\frac{1}{3}}$  то же что и  $\sqrt[3]{a}$ .

## 199.

Подобнымъ образомъ то же бываетъ и съ вышшими корнями; четвертой корень изъ  $a$  будетъ  $a^{\frac{1}{4}}$ , что съ  $\sqrt[4]{a}$  одно значить; равнымъ образомъ пятой корень изъ  $a$  будетъ  $a^{\frac{1}{5}}$ , которой то же значить, что и  $\sqrt[5]{a}$  и сѣ о всѣхъ вышшихъ корняхъ разумѣть должно.

## 200.

Такимъ образомъ можно бы было совсѣмъ обойтись безъ кореннаго знака, которой уже давно отъ всѣхъ принятъ; а вмѣсто бы онаго употреблялъ исполкованные здѣсь ломаные показатели; но когда уже разъ принятъ въ обыкновеніе одинъ знакъ и оной во всѣхъ сочиненіяхъ

яхъ попадается , то и не нужно его совсѣмъ отбрасывать : однакожъ сей новый способъ , какъ наилуччій къ изъясненію самаго дѣла въ нынѣшнія времена весьма часно употребляется ; ибо что  $a^{\frac{1}{2}}$  есть дѣйствительной квадратной корень изъ  $a$  , легко видѣть можно , когда возмемъ квадратъ онаго , что учинится ежели  $a^{\frac{1}{2}}$  на  $a^{\frac{1}{2}}$  помножится , и тогда выйдетъ  $a^1$  или  $a$  .

201.

Отсюда такожде явствуетъ , какимъ образомъ пропчѣе ломаные показатели разумѣть должно , такъ когда будемъ  $a^{\frac{4}{3}}$  , то должно сперва взять четвертую степень числа  $a$  и изъ сей извлечь третей , или кубичной корень ; такъ что  $a^{\frac{4}{3}}$  столько же по просту значить , что и  $\sqrt[3]{a^4}$  . равнымъ образомъ  $a^{\frac{3}{4}}$  найдемъ , когда сперва возмемъ кубъ , или 3 я степень числа  $a$  , которая есть  $a^3$  и изъ сей 4той корень извлечется , такъ что  $a^{\frac{3}{4}}$  , то же что и  $\sqrt[4]{a^3}$  ; подобнымъ обра-



образомъ  $a^{\frac{4}{5}}$ , то же самое есть, что и  $\sqrt[5]{a^4}$  и такъ далѣе.

202.

Когда дробь изъясляющая показателя будетъ больше 1 цы, то можно знаменованіе опредѣлить слѣдующимъ образомъ: пусть дано будетъ  $a^{\frac{5}{2}}$ , то сіе тоже что и  $a^{2\frac{1}{2}}$ , которое выйдетъ когда  $a^2$  на  $a^{\frac{1}{2}}$  помножится; но  $a^{\frac{1}{2}}$ , тоже что и  $\sqrt{a}$ , и такъ  $a^{\frac{5}{2}}$  будетъ, тоже что и  $a^2\sqrt{a}$ . Равнымъ образомъ  $a^{\frac{10}{3}}$  или  $a^{3\frac{1}{3}}$  тоже что и  $a^3\sqrt[3]{a}$ , и  $a^{15\frac{1}{4}}$  или  $a^{3\frac{3}{4}}$ , столько же значить какъ и  $a^3\sqrt[4]{a^3}$ . изъ всѣхъ сихъ довольно явствуетъ значное употребленіе ломаныхъ показателей.

203.

Оно имѣетъ также и въ дробяхъ свою пользу, такъ ежели дано будетъ  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ , то сіе тоже значить, что и  $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$ ; но мы прежде видѣли, что дробь  $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$  мож-

но

но изъяснить чрезъ  $a^{1-n}$ , слѣдовательно  
 $\sqrt[n]{a}$  можно изобразить чрезъ  $a^{-\frac{1}{n}}$ , такимъ  
 же образомъ  $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$  будетъ  $a^{-\frac{1}{n}}$  и  $\frac{a^2}{\sqrt[n]{a}}$  пе-  
 ремѣняется въ  $\frac{a^2}{a^{\frac{1}{n}}}$  откуда выходя  $a^2$   
 умноженной на  $a^{-\frac{1}{n}}$ , что перемѣняется  
 въ  $a^{\frac{5}{4}}$  т. е. въ  $a^{\frac{1}{4}}$ , а сіе наконецъ бу-  
 детъ  $a^{\frac{1}{4}}$ ; такія превращенія облегчаю-  
 шся самимъ упражненіемъ.

204.

Наконецъ еще примѣчать надлежитъ  
 что каждой такой корень многими спо-  
 собами изъясненъ быть можетъ. Ибо  
 когда  $\sqrt[n]{a}$  то же что и  $a^{\frac{1}{n}}$ , а  $\frac{1}{2}$  во всѣ  
 слѣдующіе дроби перемѣнятся можетъ,  
 яко  $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$  и проч. то явствуетъ, что  
 $\sqrt[n]{a}$  столь же великъ какъ  $\sqrt[4]{a^2}$ , или какъ  
 $\sqrt[6]{a^3}$  или какъ  $\sqrt[8]{a^4}$  и такъ далѣе, рав-  
 нымъ образомъ  $\sqrt[3]{a}$ , то же что  $a^{\frac{1}{3}}$ , а  $a^{\frac{1}{3}}$  то-  
 же что  $\sqrt[6]{a^2}$  или  $\sqrt[9]{a^3}$  или  $\sqrt[12]{a^4}$ , откуда легко  
 видѣть можно, что искомое число  $a$

или

или  $\alpha^1$  въ слѣдующихъ коренныхъ знакахъ изобразиться можетъ, какъ  $\sqrt[2]{\alpha^2}$  или  $\sqrt[3]{\alpha^3}$  или  $\sqrt[4]{\alpha^4}$  или  $\sqrt[5]{\alpha^5}$  и проч.

205.

Сіе весьма много способствуетъ въ умноженіи и дѣленіи, какъ наприм. надлежитъ помножить  $\sqrt[2]{\alpha}$  на  $\sqrt[3]{\alpha}$ , то вмѣсто  $\sqrt[2]{\alpha}$  пишется  $\sqrt[6]{\alpha^3}$ , а вмѣсто  $\sqrt[3]{\alpha}$  ставится  $\sqrt[6]{\alpha^2}$ , такимъ образомъ будутъ одинакіе коренные знаки, и по сему получится въ произведеніи  $\sqrt[6]{\alpha^5}$ ; что также и опсуда видѣть можно: понеже  $\alpha^{\frac{1}{2}}$  на  $\alpha^{\frac{1}{3}}$  помноженные даютъ  $\alpha^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ , но  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  равны  $\frac{5}{6}$  и слѣдовательно произведеніе  $\alpha^{\frac{5}{6}}$  или  $\sqrt[6]{\alpha^5}$  естли же бы  $\sqrt[2]{\alpha}$  или  $\alpha^{\frac{1}{2}}$ , раздѣлить должно было на  $\sqrt[3]{\alpha}$  или на  $\alpha^{\frac{1}{3}}$ , то получили бы  $\alpha^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$  или  $\alpha^{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}$  т. е.  $\alpha^{\frac{1}{6}}$  слѣдовательно  $\sqrt[6]{\alpha}$ .



## ГЛАВА XX.

О разныхъ счисленія способахъ и о ихъ  
связи вообще.

206.

До сихъ мѣстъ предлагали мы разные счисленія способы, какъ то сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе, также возвышеніе степеней, и наконецъ извлеченіе корней; но къ немалому изъясненію служить будетъ, когда мы произхожденіе сихъ счисленія способовъ, и ихъ связь между собою изъяснимъ, дабы познать можно было, будутъ ли еще другіе такіе способы возможны или нѣтъ. На такой конецъ станемъ мы употреблять новой знакъ, коимъ на мѣсто случающихся часто словъ, *то же, что, и* ставить можно; сей знакъ есть (=) и выговаривается словомъ равенство; такъ когда написано будетъ  $a = b$ , то значитъ се, что  $a$  столько же велико какъ и  $b$ , или  $a$  равно  $b$ . Такъ наприм.  $3 \cdot 5 = 15$ .

И

207.

Первой счисленія способъ, которой разуму нашему представляется, есть безспорно сложение. т. е. когда два числа вѣстны сложить, или оныхъ сумму найти должно будетъ; пусть будутъ два данныя числа  $a$  и  $b$ , и ихъ сумму изъяснимъ буквою  $c$ , то будетъ  $a + b = c$  и такъ сложение учить, когда оба числа  $a$  и  $b$  вѣстны, какимъ образомъ найти изъ оныхъ число  $c$ .

Удержавъ сіе уравненіе, обороти вопросъ и спрашивай, когда числа  $a$  и  $c$  вѣстны, то какъ сыскать число  $b$ .

Здѣсь спрашивается, какое бы число къ числу  $a$  прижать надлежало, чтобъ вышло опшуда число  $c$ . Пусть будетъ на прим.  $a = 3$ , а  $c = 8$ , такъ что  $3 + b = 8$  быть должно, то видно, что  $b$  найдется, когда 3 изъ 8 вычтутся. И такъ вообще чтобы найти  $b$ , должно  $a$  вычитать изъ  $c$ , и выйдетъ  $b = c - a$ ,  
а

а ежели къ сему придастся  $a$ , то получится  $c - a + a = c$ , и въ семъ то состоятъ произхожденіе вычитанія.

209.

И такъ происходитъ вычитаніе, когда вопросъ случающійся при сложеніи обратно выговоренъ будетъ; а понеже спастись можетъ, чпо число, которое вычиташъ должно, будетъ больше того, изъ коего вычиташъ надлежитъ; такъ наприм. когда 9 изъ 5 вычестъ надобно будетъ, то получаемъ мы отсюда понятіе о новомъ родѣ чиселъ, кои отрицательными или убыточными именуются; ибо  $5 - 9 = -4$ .

210.

Ежели много чиселъ, кои въ одну сумму сложить должно будетъ, равны между собою, то находится ихъ сумма помощію умноженія, и называется она въ такомъ случаѣ *производителемъ*. Такъ  $ab$  означаетъ произведеніе, которое выходитъ, когда одно число  $a$  на другое

$b$  помножится ; назовемъ теперь сіе произведеніе буквою  $c$ , и будетъ  $ab = c$ ; слѣд. умноженіе учимъ, какимъ способомъ изъ данныхъ чиселъ  $a$  и  $b$  найти надлежитъ  $c$ .

## 211.

Предложимъ теперь такой вопросъ : когда числа  $c$  и  $a$  извѣстны , то какъ найти изъ нихъ число  $b$  ? пусть будетъ наприм.  $a = 3$  и  $c = 15$ , такъ что  $3b = 15$ , слѣд. спрашивается теперь , какимъ бы числомъ надлежало помножить 3 , чтобъ вышло 15 ; сіе учинится помощію дѣленія , и вообще, число  $b$  найдется , когда  $c$  на  $a$  раздѣлится , откуда выходитъ слѣдующее уравненіе  $b = \frac{c}{a}$ .

## 212.

А понеже часто случается , что число  $c$  на число  $a$  дѣйствительно раздѣлиться не можетъ , хотя буква  $b$  и опредѣленное знаменованіе имѣетъ ; сіе ведетъ насъ къ новому роду чиселъ , кои дробями называются ; такъ когда возьмемъ  $a = 4$  и  $c = 3$ , такъ что  $4b = 3$ ,  
то

то видно , что  $b$  не можетъ быть цѣ-  
лое число, слѣдовательно оно есть дробь;  
а именно  $b = \frac{3}{4}$ .

113.

Понеже умноженіе рождается изъ  
сложенія, ежели много одинакихъ чиселъ  
складываемъ вмѣстѣ , то возьмемъ те-  
перь также и въ умноженіи , что многія  
одинакія числа , надлежитъ помножить  
одно на другое , чрезъ что придемъ  
мы ко степенямъ , которые вообще изъ-  
являются въ сей формѣ  $a^b$ ; сіе значить,  
что число  $a$  столько разъ само собою  
помножить должно , сколь велико число  
 $b$ . Здѣсь , какъ выше упомянуто  $a$  ко-  
рень ,  $b$  показатель , а  $a^b$  степень назы-  
ваются.

214.

Изъявимъ сію степень буквою  $c$  ,  
то будетъ  $a^b = c$ , гдѣ 3 буквы  $a$ ,  $b$  и  $c$   
попадаются. Въ наукѣ о степеняхъ по-  
казывается , что когда корень  $a$  и пока-  
затель  $b$  извѣстны , какимъ образомъ  
опшуда самую степень , т. е. букву  $c$



## 134 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

опредѣлить должно. Пусть будетъ на-  
прим.  $a=5$  и  $b=3$  такъ что  $c=5^3$ ;  
отсюда видно, что 5 или здѣсь 3 тью  
степень взять надлежитъ, которая есть  
125, слѣдовательно  $c=125$ . И такъ здѣсь  
показывается способъ, какъ изъ корня  $a$   
и показателя  $b$  степень  $c$  находить  
должно.

215.

Разсмотримъ теперь, не можно ли  
обратить или переменить сей вопросъ  
такъ, чтобъ изъ 2 хъ сихъ трехъ чиселъ  
 $a$ ,  $b$ ,  $c$  найти третіе. Сіе учинится  
можетъ двоякимъ образомъ, потому  
что съ числомъ  $c$  можно взять или  $a$ ,  
или  $b$  за извѣстныя, при чемъ примѣчать  
должно, что въ обоихъ прежнихъ слу-  
чаяхъ, въ сложеніи и умноженіи одна  
только переменна имѣетъ мѣсто; ибо въ  
первомъ случаѣ  $a+b=c$ ; все равно, будетъ  
ли при  $c$  или  $a$  или  $b$  извѣстно, и все  
равно написано ли будетъ  $a+b$  или  $b+a$ ;  
равнымъ образомъ и въ уравненіи  $ab=c$   
или  $ba=c$ , гдѣ буквы  $a$  и  $b$  также пере-  
спавить можно; напротивъ того въ сте-  
пеняхъ

пеняхъ сего быть не можетъ, по тому что вмѣстѣ  $a^b$  ни коимъ образомъ не лзя поставить  $b^a$ , какъ изъ нѣкоторыхъ примѣровъ легко видѣть можно; ибо когда положится  $a=5$ , и  $b=3$ , то будетъ  $a^b=5^3=125$ ; напротивъ того  $b^a=3^5=243$ , которые отъ 125 весьма далеко разнятся.

216.

Отсюда видно, что здѣсь дѣйстви-тельно два вопроса быть могутъ, изъ коихъ 1-й есть, ежели со степенью  $c$  показатель  $b$  данъ будетъ, то какимъ образомъ найти должно корень  $a$ ; а другой вопросъ, когда степень  $c$  и корень  $a$  извѣстны, то какъ сыскать показателя  $b$ .

217.

Первой изъ сихъ двухъ вопросовъ разрѣшенъ уже прежде, въ наукѣ о извлеченіи корней: такъ когда напримъ  $b=2$  и  $a^2=c$ , то должно быть  $a$  такое число, котораго квадратъ равенъ  $c$ , слѣдовательно  $a=\sqrt{c}$ . Подобнымъ образомъ когда  $b=3$  будетъ  $a^3=c$  т. е. кубъ изъ  $a$  равенъ

данному числу  $c$ , и такъ получится  $a = \sqrt[3]{c}$ . Отсюда вообще разумѣть можно, какимъ образомъ изъ двухъ буквъ  $c$  и  $b$  сыскать букву  $a$ , а именно будетъ  $a = \sqrt[b]{c}$ .

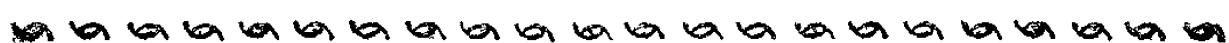
218.

Какъ скоро случится, что данное число  $c$  не будетъ дѣйствительная такая степень, которая требуется корень, то выше сего уже примѣчено, что желаемого корня  $a$  ни въ цѣлыхъ ни въ ломаныхъ числахъ изъяснить не возможно, хотя онъ и долженъ имѣть опредѣленное свое знаменованіе; чрезъ что приходимъ мы къ новому роду чиселъ, кои *неизплекомыми* или *глухими* числами именуются, изъ которыхъ по различію корней безконечное множество родовъ быть можетъ.

Сіе разсужденіе ведетъ насъ такожде къ совсѣмъ особливому роду чиселъ, кои *непозможными* или *мнимыми* числами называются.

219.

Осталось намъ теперь разсмотримъ еще одинъ вопросъ , а именно : когда свѣрхъ степени  $c$ , еще корень  $a$  извѣстенъ будетъ , то какимъ образомъ найти отсюда показателя. Сей вопросъ ведетъ насъ къ важной наукѣ о логарифмахъ , коихъ польза во всей Математикѣ столь велика , что ни одного большаго вычисления безъ помощи логарифмовъ совершить не возможно. Сію науку изъяснимъ мы въ слѣдующей главѣ , гдѣ придемъ къ совсѣмъ новому роду чиселъ , кои и къ прежнимъ неизвлекаемымъ причтены бытъ не могутъ.



## ГЛАВА XXI.

О логарифмахъ вообще.

220.

Разсматривая уравненіе  $a^b = c$  впервыхъ примѣчаемъ мы , что въ наукѣ о логарифмахъ вмѣсто корня  $a$  , по изволенію

И 5

нѣ-

и которое число взять можно, такъ чтобы оно всегда поже знаменованіе имѣло. Ежели теперь показатель  $b$  возьмется такъ, что степень  $a^b$  равна будетъ данному числу  $c$ , то показатель  $b$  логарифмъ числа  $c$  называется. Для означенія логарифма употребляется знакъ латинская буква  $l$ , которая попереди числа  $c$  ставится, такъ пишутъ  $b = lc$  чрезъ что означается, что  $b$  равно логарифму числа  $c$ , или логарифмъ числа  $c$  есть  $b$ .

## 221.

И такъ когда корень  $a$  разъ взятъ за постоянной, то логарифмъ каждого числа  $c$  не иное что есть, какъ показатель той степени изъ  $a$ , которая числу  $c$  равна. Когда теперь  $c = a^b$ , будетъ  $b$  логарифмъ степени  $a^b$ , и ежели возьмется  $b = 1$ , то 1 будетъ логарифмъ числа  $a^1$  т. е.  $la = 1$ ; когда же  $b = 2$ , то 2 логарифмъ числа  $a^2$  т. е.  $la^2 = 2$ , равнымъ образомъ  $la^3 = 3$ ,  $la^4 = 4$ ,  $la^5 = 5$  и такъ далѣе.

222.

Положивъ  $b=0$ , будетъ 0 логарифмъ числа  $a^0$ , но  $a^0=1$  и такъ  $l_1=0$ , какой бы корень мѣсто  $a$  взявъ ни былъ. Когда же положимся  $b=-1$ , то будетъ  $-1$  логарифмъ числа  $a^{-1}$ , но  $a^{-1}=\frac{1}{a}$ , слѣдствительно  $l_{\frac{1}{a}}=-1$ . Подобнымъ образомъ получатся  $l_{\frac{1}{a^2}}=-2$ ,  $l_{\frac{1}{a^3}}=-3$ ,  $l_{\frac{1}{a^4}}=-4$  и проч.

223.

Отсюда видно, какъ изъясняются логарифмы всѣхъ степеней корня  $a$ , да и самыхъ дробей, коихъ числитель  $=1$ , а знаменатель степень изъ  $a$ , въ которыхъ случаяхъ логарифмы суть цѣлыя числа. Но еслии вмѣсто  $b$  возмущся дроби, то будутъ оныя логарифмы неизвлекаемыхъ чиселъ. т. е. когда  $b=\frac{1}{2}$ , будетъ  $\frac{1}{2}$  логарифмъ числа  $a^{\frac{1}{2}}$  или числа  $\sqrt{a}$  и по сему получимся  $l\sqrt{a}=\frac{1}{2}$ , такимъ же образомъ  $l_{\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{3}$ ;  $l_{\sqrt[4]{a}}=\frac{1}{4}$  и такъ далѣе.

224.

Но ежели логарифмъ другаго числа, нежели  $c$  найти должно будетъ, то  
легко

легко усмотрѣть можно , что оной ни цѣлое число ни дробь быть не можетъ ; между тѣмъ однакожъ выйдетъ всегда такой показатель  $b$  , что степень  $a^b$  данному числу  $c$  равна , и  $b = lc$  ; слѣдовательно вообще  $a^{lc} = c$ .

225.

Возьмемъ теперь другое число  $d$  въ разсужденіе, и извѣдимъ логарифмъ онаго чрезъ  $ld$  такъ , что  $a^{ld} = d$  , помножь теперь сію формулу на прежнюю , то получится  $a^{lc + ld} = cd$  ; но показатель всегда бываетъ логарифмъ степени  $cd$  слѣдовательно  $lc + ld = lcd$ . Когда же первая формула на впорую раздѣлится, то выйдетъ  $a^{lc - ld} = \frac{c}{d}$  , слѣдовательно будетъ  $lc - ld = l\frac{c}{d}$ .

226.

Сіе ведетъ насъ къ двумъ главнѣйшимъ свойствамъ логарифмовъ , изъ которыхъ первое состоитъ въ уравненіи  $lc + ld = lcd$  ; по сему научаемся мы , что логарифмъ произведенія  $cd$  найдется когда логарифмы множителей сложатся

жашся въспѣ. Другое свойство содержишся въ уравненіи  $lc - cd = l\frac{c}{d}$  и показываетъ намъ, что логарифмъ дроби сыщется, когда изъ логарифма числителя вычтется логарифмъ знаменателя.

227.

И въ семъ то состоитъ значная польза, которую подають логарифмы въ выкладкахъ; ибо когда два числа одно на другое помножить или раздѣлить надобно будетъ, то надлежитъ только оныхъ логарифмы слагать или вычитать. Но очевидно есть, что несравненно легче числа складывать или вычитать, нежели множить или дѣлить, а особливо большія числа.

228.

Еще важнѣе оныхъ польза въ степеняхъ и въ извлеченіи корней; ибо когда  $d = c$ , то по первому свойству будетъ  $lc + lc = lcc$  и такъ  $lcc = 2lc$ . Такимъ же образомъ получится  $lc^3 = 3lc$ ,  $lc^4 = 4lc$  и вообще  $lc^n = nlc$ . Возми теперь въспо



и ломаные числа, то получишь  $lc^{\frac{1}{2}}$  т. е.  $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$ , также когда возмешь отрицательныя числа  $lc^{-1}$  т. е.  $l\frac{1}{c} = -lc$ ,  $lc^{-2}$  т. е.  $l\frac{1}{cc} = -2lc$  и такъ далѣе.

229.

Когда въ рукахъ будутъ такіе таблицы, въ которыхъ для всѣхъ чиселъ вычислены логарифмы, то при помощи оныхъ съ легчайшимъ трудомъ наипруднѣйшія вычисленія дѣлать можно, гдѣ большое умноженіе или дѣленіе, такожде возвышеніе степеней и извлеченіе корней случающа. По тому что въ сихъ таблицахъ, какъ для каждаго числа логарифмъ, такъ и для каждаго логарифма самое число сыскать можно. Такъ ежели изъ числа  $c$  корень квадратной найти надобно будетъ, то ищется сперва логарифмъ числа  $c$ , а потомъ онаго берется половина, которая есть  $\frac{1}{2}lc$ , и которая есть логарифмъ искомаго квадратнаго корня, или число, которое соотвѣствуетъ сему логарифму и въ таб

таблицахъ найдено, есть самой квадратной корень.

230.

Мы уже видѣли прежде, что 1, 2, 3, 4, 5, 6 и проч. слѣдовательно всѣ положительныя числа суть логарифмы корня  $a$  и его положительныхъ степеней, т. е. чиселъ, которыя больше 1 цы.

Напротивъ того отрицательныя числа, яко  $-1$ ,  $-2$  и проч. суть логарифмы дробей  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{aa}$  и проч. которые меньше 1 цы, однако больше нежели 0.

Отсюда слѣдуетъ, что когда логарифмъ есть положительной, то соотвѣствующее ему число будетъ больше 1 цы.

Если же логарифмъ будетъ отрицательной, то принадлежащее ему число будетъ меньше 1 цы, однакожъ больше нежели 0. Слѣдовательно для отрицательныхъ чиселъ логарифмовъ извѣдать не возможно или логарифмы отрицательныхъ чиселъ суть невозможныя и надлежатъ до рода мнимыхъ чиселъ.

Для большей ясности надлежитъ здѣсь брать за корень  $a$  опредѣленное число, и притомъ то самое, по которому употребительные логарифмовъ таблицы вычислены. А берется тутъ за корень  $a$  число 10, потому что уже по оному вся изчисленія наука установа. Но легко усмотрѣть можно, что вмѣсто онаго каждое другое число, которое бы только было больше 1-цы, взявъ можно; ежели же положится  $a=1$ , то всѣ ея степени будутъ какъ  $a^b = 1$  и никогда другому данному числу  $c$  равны не будутъ.



## ГЛАВА ХХІІ.

О употребительныхъ таблицахъ логарифмовъ.

Во сихъ таблицахъ, какъ уже упомянуто, полагается за основаніе, что корень  $a=10$ , такимъ образомъ логарифмъ

риѳмъ каждаго числа  $c$ , будетъ тотъ показатель, до котораго число 10 возвышено, а степень равна самому тому числу; или когда логариѳмъ числа  $c$  изъ явится чрезъ  $l c$ , то будетъ завсегда  $10^{lc} = c$ .

233.

Мы уже примѣнили, что логариѳмъ 1 цы всегда бываетъ 0, попому что;  $10^0 = 1$  и шакъ  $l 1 = 0$ ,  $l 10 = 1$ ,  $l 100 = 2$ ,  $l 1000 = 3$ ,  $l 10000 = 4$ ,  $l 100000 = 5$ ,  $l 1000000 = 6$ , попомъ  $l \frac{1}{10} = -1$ ;  $l \frac{1}{100} = -2$ ,  $l \frac{1}{1000} = -3$ ,  $l \frac{1}{10000} = -4$ ,  $l \frac{1}{100000} = -5$ ,  $l \frac{1}{1000000} = -6$ .

234.

Чѣмъ легче логариѳмы сихъ главныхъ чиселъ находятся, тѣмъ труднѣе искать логариѳмы всѣхъ прочихъ чиселъ, кои равнымъ образомъ въ таблицахъ изъявлены быть должны. Здѣсь еще не мѣсто дать довольное показаніе, какимъ образомъ оныя находить должно; чего ради рассмотримъ только вообще, что при семъ примѣчать надлежитъ.

235.

Когда логарифмъ 1 цы есть 0,  $10 \equiv 1$ , то легко уразумѣть можно, что всѣхъ чиселъ между 1 и 10 логариѣмы, содержащіяся должны между 0 и 1, или они будутъ больше нежели 0, а меньше 1 цы. Возмемъ въ разсужденіе число 2 и означимъ его логариѣмъ буквою  $x$  т. е.  $12 = x$ , то извѣстно, что  $x$  будетъ больше 0 ля, а меньше 1 цы, оно должно быть такое число, чтобъ  $10^x$  точно было равно 2мъ. Легко также усмотрѣть можно, что  $x$  гораздо менѣе быть долженъ, нежели  $\frac{1}{2}$  или что  $10^{\frac{1}{2}}$  болѣе 2хъ, ибо взявъ съ обѣихъ сторонъ квадраты, будетъ квадратъ изъ  $10^{\frac{1}{2}} = 10$ , а квадратъ изъ 2хъ есть 4, слѣдовательно гораздо меньше. Подобнымъ образомъ  $\frac{1}{3}$  еще вмѣсто  $x$  велика, или  $10^{\frac{1}{3}}$  больше 2хъ; ибо кубъ изъ  $10^{\frac{1}{3}} = 10$ , а кубъ изъ 2хъ  $= 8$ . Напротивъ того взятая на мѣсто  $x$ ,  $\frac{1}{4}$  будетъ мала; ибо 4тая степень изъ  $10^{\frac{1}{4}} = 10$ , а изъ 2хъ  $= 16$

$= 16$ . И такъ изъ сего явствуетъ , что  $x$  или  $1/2$  есть меньше  $\frac{1}{3}$  , а больше  $\frac{1}{4}$ . Такимъ образомъ для каждой средней между ими дроби найти можно , будетъ ли она больше или меньше , какъ на прим.  $\frac{2}{7}$  меньше , нежели  $\frac{1}{3}$  , а больше нежели  $\frac{1}{4}$ : если же теперь взять вмѣсто  $x$ ,  $\frac{2}{7}$ , то должно бы  $10^{\frac{2}{7}} = 2$  и когда бы сіе такъ было , то надлежало бы седьмымъ степенямъ , какъ одной такъ и другой быть равнымъ , но изъ  $10^{\frac{2}{7}}$  7 мая степень  $= 10^2 = 100$  , которая 7 мой степени числа  $2x$  равна быть должна , но 7 мая степень  $2x = 128$  и слѣдовательно больше прежней , и  $10^{\frac{2}{7}}$  меньше нежели 2 , слѣдовательно  $\frac{2}{7}$  меньше нежели  $1/2$  , или  $1/2$  больше нежели  $\frac{2}{7}$  однакожъ меньше  $\frac{1}{3}$  пи.

Пусть такая дробь будетъ  $\frac{3}{10}$ : то должно бы теперь  $10^{\frac{3}{10}} = 2$  , а когда сіе такъ , то надлежало бы 10 мой степени , какъ одной , такъ и другой быть равнымъ ; но 10 шая степень изъ  $10^{\frac{3}{10}} = 10^3 = 1000$   
1    2
изъ

## 148 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

изъ  $2^x$  же 10-тая степень  $\equiv 1024$ , откуда заключаемъ, что  $\frac{3}{10}$  еще малы, или  $l2$  больше нежели  $\frac{3}{10}$ , однакожъ меньше  $\frac{1}{3}$  ши.

236.

Сіе разсужденіе служитъ къ показанію, что  $l2$  опредѣленную свою величину имѣетъ, ибо знаемъ мы, что оной за подлинно больше  $\frac{3}{10}$ , а меньше  $\frac{1}{3}$  ши. Далѣе продолжая здѣсь мы еще не можемъ, и поелику подлиннаго знаменованія не знаемъ, то будемъ вмѣсто онаго уло преблать букву  $x$ , такъ что  $l2 = x$  и покажемъ, естли бы оной былъ найденъ, то какимъ образомъ найши оппуда можно логариѣмы другихъ безконечно многихъ чиселъ; къ чему служитъ прежде показанное уравненіе  $lcd = lc + ld$ ; или что логариѣмъ произведенія найдется, когда логариѣмы множителей сложатся въ одну сумму.

237.

Когда  $l2 = x$ , а  $l10 = 1$ , то получимся  $l20 = x + 1$ ,  $l200 = x + 2$ ,  
 $l2000$

$l2000 = x + 3$ ,  $l20000 = x + 4$ ,  $l200000 = x + 5$  и такъ далѣе.

278.

Когда  $lc^2 = 2lc$ ,  $lc^3 = 3lc$ ,  $lc^4 = 4lc$  и проч. то получаемъ мы отсюда  $l4 = 2x$ ,  $l8 = 3x$ ,  $l16 = 4x$ ,  $l32 = 5x$ ,  $l64 = 6x$  и проч. изъ сихъ находимъ далѣе  $l40 = 2x + 1$ ,  $l400 = 2x + 2$ ,  $l4000 = 2x + 3$ ,  $l40000 = 2x + 4$  и проч.  $l80 = 3x + 1$ ,  $l800 = 3x + 2$ ,  $l8000 = 3x + 3$ ,  $l80000 = 3x + 4$  и проч.  $l160 = 4x + 1$ ,  $l1600 = 4x + 2$ ,  $l16000 = 4x + 3$ ,  $l160000 = 4x + 4$  и проч.

279.

Понеже найдено еще  $lc_d = lc - ld$ , то положимъ  $c = 10$ ,  $d = 2$ , но когда  $l10 = 1$ ,  $l2 = x$  то получимъ  $lc_d$ , т. е.  $l5 = 1 - x$ , изъ сего  $l50 = 2 - x$ , а  $l500 = 3 - x$ ,  $l5000 = 4 - x$  и проч. потомъ  $l25 = 2 - 2x$ ,  $l125 = 3 - 3x$ ,  $l625 = 4 - 4x$  и проч. изъ сихъ находимъ далѣе слѣдующіе  $l250 = 3 - 2x$ ,  $l2500 = 4 - 2x$ ,  $l25000 = 5 - 2x$  и проч. еще же  $l1250$

1 3

= 4



## 150 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

$\equiv 4 - 3x$ ;  $\lg 12500 \equiv 5 - 3x$ ,  $\lg 125000 \equiv 6 - 3x$   
и проч. также  $\lg 6250 \equiv 5 - 4x$ ,  $\lg 62500$   
 $\equiv 6 - 4x$ ;  $\lg 625000 \equiv 7 - 4x$  и такъ  
далѣе.

240.

Если бы логариѳмъ  $3x$  най-  
денъ былъ, то бы можно было опре-  
дѣлить логариѳмы еще безконечно мно-  
гихъ чиселъ; положимъ вмѣсто  $\lg 3$  бук-  
ву  $y$  то будемъ имѣть  $\lg 30 \equiv y + 1$ ,  $\lg 300$   
 $\equiv y + 2$ ,  $\lg 3000 \equiv y + 3$  и проч.  $\lg 9 \equiv 2y$ ,  
 $\lg 27 \equiv 3y$ ,  $\lg 81 \equiv 4y$ ,  $\lg 243 \equiv 5y$  и проч. а  
изъ сихъ далѣе найдемъ  $\lg 6 \equiv x + y$ ,  $\lg 12$   
 $\equiv 2x + y$ ,  $\lg 18 \equiv x + 2y$ , также  $\lg 15 \equiv \lg 3$   
 $+ \lg 5 \equiv y + 1 - x$ .

241.

Мы выше сего видѣли, что всѣ  
числа выходящія чрезъ умноженіе изъ такъ  
называемыхъ первыхъ чиселъ; слѣдовате-  
льно когда логариѳмы сихъ чиселъ извѣ-  
стны, то можно найти изъ нихъ логариѳ-  
мы всѣхъ другихъ чиселъ, по одно-  
му только сложенію, какъ наприм. числа  
210, которое состоитъ изъ слѣдующихъ

мно-

множителей 2. 3. 5. 7 ; будетъ логариѳмъ  $= l 2 + l 3 + l 5 + l 7$  : равнымъ образомъ когда  $360 = 2.2.2. 3. 3. 5 = 2^3. 3^2. 5$  , то будетъ  $l 360 = 3 l 2 + 2 l 3 + l 5$ , откуда явствуетъ, какимъ образомъ изъ логариѳмовъ первыхъ чиселъ логариѳмы всѣхъ другихъ чиселъ опредѣлить можно. И такъ при дѣланіи логариѳмическихъ таблицъ о томъ должно только стараться , чтобъ найдены были логариѳмы первыхъ чиселъ.



ГЛАВА XXIII.

О способѣ представлять логариѳмы.

242.

Видѣли мы , что логариѣмъ 2 хъ больше  
нежели  $\frac{3}{10}$  а меньше  $\frac{1}{3}$  ши ; или что по-  
казатель 10 ши долженъ падать между  
сими двумя дробями , ежели степень  
должна быть равна 2 мѣ. А дробь можно  
взять , какую кто пожелаетъ , то сте-  
пень завсегда будетъ не извлекаемое число

или больше или меньше 2 хѢ , чего ради логарифма 2 хѢ такою дробью извѣявить не можно. И такѢ должно довольствоваться когда величину онаго опредѣлимѢ чрезѢ приближеніе такѢ , чтобѢ погрѣшность была не чувствительна. КѢ сему употребляются такѢ называемые десятичные дроби , которыхѢ напуру и свойство исполковать здѣсь яснѣе потребно.

## 243.

Не безвѣстно , что всѢ числа пишущся обыкновенно сими 10ю знаками , яко 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , они на первомѢ только сѢ правой руки мѣстѢ , собственное свое знаменованіе имѣютѢ , а на второмѢ мѣстѢ знаменованіе ихѢ бываетѢ вѢ 10 разѢ больше , на третьемѢ вѢ 100 разѢ на четвертомѢ вѢ 1000 разѢ и такѢ далѣе , на каждомѢ слѣдующемѢ мѣстѢ вѢ 10 разѢ больше нежели на предвѣдущемѢ.

ТакѢ вѢ семѢ числѢ 1767 стоитѢ , на первомѢ мѣстѢ сѢ правой руки знакѢ

7, которой дѣйствительно 7 и значитѣ, на второмѣ мѣстѣ сѣоятѣ 6, кои не просто 6 но 10 6 или 60 показывающѣ знакѣ 7 на третьемѣ мѣстѣ значитѣ 100 7 или 700, и наконецъ 1 на четвертомѣ значитѣ 1000 и выговаривается сѣе число такѣ :

Тысяча семѣ сотѣ шестьдесятѣ семѣ.

244.

Когда теперь отѣ правой руки къ лѣвой знаменованіе знаковъ въ десятеро больше бываетѣ, и слѣдовательно отѣ лѣвой къ правой въ 10 разѣ меньше; по сему правилу можно продолжатѣ сѣе далѣе подвигаяся въ правую сторону, и тогда знаменованіе знаковъ будетѣ всегда въ десять разѣ меньше. Но здѣсь надлежитѣ замѣнить по мѣсто, гдѣ знаки собственное свое знаменованіе имѣютѣ, а сѣе дѣлается запятою, которая позади сего мѣста ставится. И такѣ когда сѣе число написано будетѣ 36, 5 4892, то оно такѣ разумѣть должно

жно ; во первыхъ знакъ 6 имѣетъ свое собственное знаменованіе , знакъ 3 на второмъ мѣстѣ значить 30 , а позади запятой знакъ 5 значить только  $\frac{5}{10}$  слѣдующей по немъ  $4 = \frac{4}{100}$  , знакъ  $8 = \frac{8}{1000}$  , знакъ  $9 = \frac{9}{10000}$  , и послѣдней  $2 = \frac{2}{100000}$  . Откуда видно , чѣмъ далѣе сѣи знаки въ правую сторону продолжаются, то знаменованіе ихъ столь мало наконецъ бываетъ, что они за ничто почтаться могутъ.

## 245.

Сей способъ изъяслять числа называется десятичной дробью , и по сему способу логарифмы въ таблицахъ представлены , гдѣ логариѳмъ 2 хъ изъясляется такъ 0, 3010300 , при чемъ примѣчать должно , что ежели предъ запятою стоитъ 0, то такой логариѳмъ цѣлаго числа не составляетъ , и что знаменованіе его есть  $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$  и по сему можно бы послѣдніе 2 знака отбросить , но оныя для того только удерживаются, чтобъ показать, что нѣтъ дѣйствительно ни одной изъ

изъ

изъ сихъ частицъ; но симъ не опровергается, будтобы уже далѣе никакихъ малыхъ частицъ не слѣдовало, но оныя ради ихъ малости за ничто почитаются.

246.

Логарифмъ 3 хъ изображается такъ 0, 4771213 откуда явствуетъ, что онъ не составляется цѣлаго, но состоитъ изъ сихъ дробей  $\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}$ ; не должно думать, чтобъ сей логарифмъ такимъ образомъ изъясненъ былъ весьма точно; но столько извѣстно, что погрѣшность за подлинно меньше  $\frac{1}{10000000}$  части, которая и въ самомъ дѣлѣ столь мала, что ея во всѣхъ почти изчисленіяхъ опустить можно.

247.

По сему способу логарифмъ 1 цы изъясняется такъ 0, 0000000, ибо оной дѣйствительно есть 0, логарифмъ 10 пи есть 1, 0000000, откуда видѣть можно; что оной есть точно 1, логарифмъ 100 есть 2, 0000000 или точно 2, отсюда  
яв-

явсипвуеть, что логарифма чиселъ между 10 и 100 содержащихся, или которыя изображаются двумя знаками, будутъ между 1 цеою и 2-мя слѣдовательно изъ-являюся 1 цеою и десятичною дробью; такъ  $150 = 1, 6989700$ , слѣдов. онъ равенъ цѣлой 1 цѣ и сверхъ ея еще  $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$ ; а пѣхъ чиселъ, кои между 100 и 1000 находятся логариѣмы будутъ 2 съ приложенною десятичною дробью, яко  $1500 = 2, 9030900$ ; чиселъ отъ 1000 до 10000 логарифмы больше нежели 3, а отъ 10000 до 100000 больше 4 хъ и такъ далѣе.

248.

Чиселъ меньше 10 ти, и которыя пишущся однимъ знакомъ, логариѣмы не составляють еще цѣлаго, и для того предъ запятою стоитъ 0. Въ каждомъ логариѣмѣ двѣ части примѣчать надлежитъ, первая стоитъ предъ запятою и показываетъ цѣлыя числа, а другая часть изъявляетъ десятичные дроби, которыя къ цѣлому приславляются. И такъ пер-  
вую

вую или цѣлую логариѣма часть легко можно знать, потому, что она бываетъ о для всѣхъ чиселъ, которыя состоятъ изъ одного знака; для чиселъ изъ двухъ знаковъ состоящихъ въ логариѣмахъ цѣлое будетъ 1. Цѣлое 2 будетъ въ логариѣмахъ такихъ чиселъ, кои состоятъ изъ 3хъ знаковъ и такъ далѣе; цѣлое всегда бываетъ 1 цю меньше противъ числа знаковъ: такъ, когда пребудетъ логариѣмъ числа 1-67, то уже извѣстно, что первая или цѣлая онаго часть должна быть 3.

249.

Теперь наизворотъ имѣя первую логариѣма часть, можно знать изъ сколькихъ знаковъ самое число состоятъ будетъ. Понеже число знаковъ однимъ бываетъ больше противъ цѣлой логариѣма части; и такъ когда не извѣстнаго числа, найденъ будетъ сей логарифмъ 6, 477-1213, то можно заразъ знать, что соответствующее ему число изъ 7ми состоятъ знаковъ и слѣдовательно должно



жно быть больше нежели 1000000, сѣе число и въ самомъ дѣлѣ есть 3000000. ибо  $\lg 3000000 = \lg 3 + \lg 1000000$ , но  $\lg 3 = 0,4771213$ ,  $\lg 1000000 = 6$ , которые оба логарифма сложенные вмѣстѣ даютъ 6,4771213.

250.

По сему во всякомъ логарифмѣ, главное дѣло состоишь въ слѣдующей за запятою десятичной дроби, которая когда разѣ уже извѣстна, то для многихъ чиселъ служить можетъ; а что бы сѣе показать, то возьмемъ мы въ рассужденіе логарифмъ числа 365, котораго первая часть есть безспорно 2, а вмѣстѣ со второй частью, т. е. десятичной дроби, напомнимъ для краткости букву  $x$ , такъ, что  $\lg 365 = 2 + x$ , отсюда получаемъ мы, когда далѣе на 10 множимъ станемъ:  $\lg 3650 = 3 + x$ ,  $\lg 36500 = 4 + x$ ,  $\lg 365000 = 5 + x$ ; можемъ также назадъ возвратиться и дѣлить на 10, то получимъ  $\lg 36,5 = 1 + x$ ,  $\lg 3,65 = 0 + x$ ,  $\lg 0,365 = -1 + x$ ;  $\lg 0,0365 = -2 + x$ ;  $\lg 0,00365 = -3 + x$  и такъ далѣе.

251.

Для всѣхъ тѣхъ чиселъ , которыя изъ знаковъ 365 производятъ имѣя предъ собой или позади 0 , всегда та же самая десятичная дробь въ ихъ логариѣмахъ будетъ ; а разность состоитъ только въ цѣломъ числѣ предъ запятою , которое , какъ мы видѣли , быть также можетъ и отрицательнымъ; а именно когда число будетъ меньше 1 цы. Но понеже простые выкладки не очень горазды обходиться съ отрицательными числами , для того въ такихъ случаяхъ цѣлое число 10ю увеличивается и вмѣсто 0 ставится обыкновенно предъ запятою 10 , по сему вмѣсто—1 получится 9; вмѣсто—2 получится 8, а вмѣсто—3, 7 и такъ далѣе. Но при семъ не должно никогда забывать, что цѣлыя предъ запятою числа десяткомъ увеличены , дабы не заключить изъ того , что число состоитъ изъ 10, или 9, или 8 знаковъ ; но что число стоитъ позади запятой на первомъ мѣстѣ, когда съ начала логариѣма стоятъ 9 ; или на второмъ, ежели 8 , или на треть-

трегьемъ , когда 7 стоятъ съ начала  
логариѣма. Такимъ образомъ изображены  
въ таблицахъ логариѣмы синусовъ.

252.

Въ обыкновенныхъ таблицахъ десятичныхъ для логарифмовъ дроби состоятъ изъ 7ми знаковъ, изъ которыхъ послѣдней значить  $\frac{1}{1000000}$  часть и твердо можно положиться, что оная дробь ни на одну такую часть отъ правды не отходитъ, которая обыкновенно погрѣшность ничего не значить; а если бы логарифмы еще точнѣе вычислилъ за благо разсудилось, то должно бы ихъ представить больше нежели въ 7ми знакахъ, что въ большихъ улаковыхъ таблицахъ и учинено, гдѣ логарифмы вычислены до 10 знаковъ.

253.

Понеже первая логариѣма часть ,  
никакой трудности не имѣетъ , то она  
въ таблицахъ и не спавится , а нахо-  
дятся только тамъ 7 знаковъ десятич-  
ной

ной дроби , которая другую часть составляетъ и въ Англическихъ таблицахъ находяшяся оныя для всѣхъ чиселъ отъ 1 до 100000 изображены ; но когда еще большія числа случашя , то приложены малинкѣ таблички изъ коихъ видѣть можно , сколько еще слѣдующихъ знаковъ къ логариѣму придашь надлежитъ.

254.

И такъ отсюда легко разумѣть можно какимъ образомъ найденному логариѣму соотвѣтствующее число въ таблицахъ брать должно ; а чтобы самое дѣло лучше изъяснить , то помножимъ сѣи между собою числа 343 и 2401 ; но понеже ихъ логарифмы слагать должно , то производится выкладка такимъ образомъ:

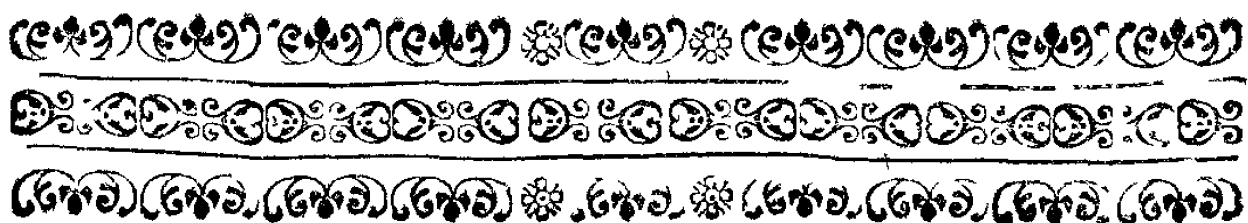
$$\begin{array}{r}
 1343 = 2, 5352941 \\
 12401 = 3, 3803922 \\
 \hline
 5, 9156863 \\
 6847 \\
 \hline
 823543 \qquad \qquad \qquad 16
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{сложитъ} \\ \text{вычитъ} \end{array}$$

Сія сумма есть логариѣмъ произведенія ; изъ первой онаго части познаемъ мы , что произведеніе изъ 6 знаковъ состояшь должно , которое изъ десятичной дроби при помощи таблицъ найдено 823543 и сіе есть подлинное искомое произведеніе.

Понеже логариѣмы при извлеченіи корней великую пользу приносятъ , то хопимъ мы сіе однимъ изъяснить примѣромъ.

Пусть должно будетъ изъ числа 10 пи найти квадратной корень, то надлежитъ здѣсь логариѣмъ числа 10 пи , которой есть 1, 000000 раздѣлить на 2, частное будетъ 0, 500000 логариѣмъ искомаго корня , а корень самъ изъ таблицъ найдется 3, 16228, котораго квадратъ и въ самомъ дѣлѣ только  $\frac{1}{10000}$  частицею больше нежели 10.

конецъ первой части о разныхъ родахъ  
изчисленія простыхъ количествъ.



## ЧАСТЬ ВТОРАЯ, О разныхъ родахъ изчисленія, составныхъ количествъ.



### ГЛАВА I.

О сложеніи составныхъ количествъ.

256.

**К**огда двѣ или больше формулы состоящія изъ многихъ членовъ сложить должно будетъ, то означается иногда сложеніе помощію извѣстныхъ знаковъ, а именно ставя каждую формулу въ скобкахъ и оныя знакомъ  $+$  соединяя; такъ когда слѣдующія формулы  $a+b+c$  и  $d+e+f$  вмѣстѣ сло-

житѣ надлежитѣ , то о́значается сумма  
такимѣ образомъ.

$$(a + b + c) + (d + e + f)$$

257.

Симѣ образомъ сложеніе только  
означается , а не совсѣмѣ совершается ;  
но не трудно усмотрѣти , что для со-  
вершенія онаго однѣ только скобки ос-  
тавить должно ; ибо когда число  $d + e + f$   
къ первому придашь надлежитѣ , то учи-  
нися сіе ежели сперва  $+ d$  , потомѣ  $+ e$  ,  
а наконецѣ  $+ f$  приспавишь , тогда сумма  
будетѣ :

$$a + b + c + d + e + f$$

Сіе такожде примѣчать надлежитѣ ,  
ежели нѣкоторыя члены будущѣ имѣть  
знакъ  $-$  , то должно только ихѣ поста-  
вить съ ихѣ знаками.

258.

А что бы сіе яснѣе показать , то  
возмемѣ мы примѣръ въ числахѣ и къ  
формулѣ 12-8, придадимѣ еще сію 15-6.

Придай

Придай во первымъ 15, то будешъ  $12 - 8 + 15$ , но теперь уже придано много, потому что 15 — 6 придаютъ только надлежишъ, и такъ видно, что 6 излишни, чего ради отними сѣи 6 или напиши оныя съ ихъ знакомъ, то получишя точная сумма  $12 - 8 + 15 - 6$ . Ошкуда явствуетъ, что сумма найдешся, когда всѣ члены каждой съ своимъ знакомъ поставятся.

259.

Когда къ формулѣ  $a - b + c$  придаютъ должно еще сѣю  $d - e - f$ , то сумма изъбавляется слѣдующимъ образомъ  $a - b + c + d - e - f$ ; при томъ надлежишъ примѣчать, что на порядокъ членовъ смотрѣть здѣсь нечего, но что оныя по произволѣю переспавлены между собою быть могутъ, лишь бы только каждой поставленной передъ нимъ знакъ имѣлъ. Такимъ образомъ можно бы помянутую сумму написать и такъ  $c - e + a - f + d - b$ .



260.

И по сему сложеніе не имѣетъ ни малѣйшаго затрудненія, какой бы видъ члены ни имѣли; такъ когда къ формулѣ  $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc$  надлежитъ при-  
дать еще сію  $5\sqrt[5]{a} - 7c$ , будетъ сумма  $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c$ ; почему видно, что сія есть искомая сумма; при семъ также позволяется переставлять члены между собою по изволенію удержавъ только при каждомъ членѣ его знакъ.

261.

Часто случается, что найденная такимъ образомъ сумма гораздо короче изобразиться можетъ; попому что иногда 2 или больше членовъ совсѣмъ уничтожаются. Такъ ежелибы въ суммѣ слѣдующіе члены  $+a - a$  или такіе  $3a - 4a + a$  случились; или по крайней мѣрѣ одинъ бы членъ составили, яко  $3a + 2a = 5a$ ;  $7b - 3b = +4b$ ;  $-6c + 10c = +4c$ ,  $5a - 8a = -3a$ ;  $-7b + b = -6b$ ;  $-3c - 4c = -7c$ ;  $2a - 5a = -3a$ ;  $-3b - 5b + 2b = -6b$ .

Сіе

Сіе сокращеніе тогда только имѣетъ мѣсто, когда 2 или больше членовъ въ разсужденіи буквъ совсѣмъ одинаковы; слѣдовательно  $2a + 3a$  сократить нельзя и  $2b - b^4$  также сокращены быть не могутъ.

262.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ такого свойства и пусть должно будетъ сложить слѣдующіе двѣ формулы  $a + b$  и  $a - b$ , здѣсь по прежнимъ правиламъ выйдетъ сумма  $a + b + a - b$ , но  $a + a = 2a$ , а  $b - b = 0$ , слѣдовательно сумма  $= 2a$ ; сіе такъ выговорить можно: ежели къ суммѣ двухъ чиселъ  $(a + b)$  придастся ихъ разность  $(a - b)$  сумма будетъ большее дважды взятое. Разсматривай еще слѣдующіе примѣры.

$$\begin{array}{r|l} 3a - 2b - c & a^3 - 2aab + 2abb \\ 5b - 6c + a & -aab + 2abb - b^3 \\ \hline 4a + 3b - 7c & a^3 - 3aab + 4abb - b^3. \end{array}$$



## ГЛАВА II.

О вычитаніи составныхъ количествъ,

263.

Если вычитаніе означить только потребно будетъ , то ставишся каждая формула въ скобки, и та, которую вычитать должно ставишся съ знакомъ — возлѣ той изъ которой вычитать надлежитъ ; такъ когда изъ формулы  $a - b + c$  надлежитъ вычесть сію  $d - e + f$ , то требуемой остатокъ изображается такимъ образомъ  $(a - b + c) - (d - e + f)$ : откуда явствуетъ, что послѣднюю формулу изъ первой вычитать должно.

264.

А что бы вычитаніе дѣйствительно совершить , то во первыхъ примѣчать должно , что ежели изъ одного количества  $a$  другое положительное  $+b$  вычитеши , то получишся остатокъ  $a - b$ , естли же отрицательное число какъ  $-b$  должно будетъ вычесть, то выдеши  $a + b$ ,  
ибо

ибо долѣ вычиташъ то же есть самое ,  
какѣ бы нѣчто дашъ.

265.

Положимѣ теперь , что изѣ фор-  
мулы  $a-c$  надлежитѣ вычешъ сѣю  $b-d$  ;  
опними сперва  $b$  , то получится  $a-c-b$  ,  
но теперь уже опнято много ; ибо дол-  
жно было только опнять  $b-d$  , слѣдо-  
вательно количествомѣ  $d$  больше опнято ,  
и такѣ сѣе  $d$  паки придашъ надлежитѣ  
что получится :

$$a-c-b+d$$

Откуда выходитѣ сѣе правило : всѣ  
члены той формулы , которую вычи-  
ташъ надлежитѣ сѣ прошивными знаками  
поставлены бышъ долженствуюшѣ.

266.

Помощію сего правила весьма легко  
вычитаніе сдѣлать можно , ибо та фор-  
мула , изѣ которой вычиташъ должно ,  
ставится просто , а та , которую вы-  
читашъ надлежитѣ , сѣ прошивными зна-

## 170 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

ками къ оной присовокупляется ; такъ въ первомъ примѣрѣ изъ формулы  $a-b+c$  вычешь должно сію  $d-e+f$ , получится  $a-b+c-d+e-f$ , а что бы сіе изъяснить въ самыхъ числахъ, то выпиши изъ  $9-3+2$  сію формулу  $6-2+4$ , въ остаткѣ будетъ  $9-3+2-6+2-4=0$  или  $9-3+2=8$ ;  $6-2+4=8$ ; а  $8-8=0$ .

267.

Когда вычитаніе никакой трудности въ себѣ не имѣетъ, то осталось только примѣчать, что въ найденномъ остаткѣ 2 или больше членовъ быть могутъ, кои въ разсужденіи буквъ одинаковы, и тогда можно дѣлать сокращеніе по тѣмъ же правиламъ, которыя предписаны выше сего при сложеніи.

268.

Изъ суммы двухъ чиселъ  $a+b$  надлежитъ вычешь ихъ разность  $a-b$ ; получится впервыхъ  $a+b-a+b$ ; но  $a-a=0$ ,  $b+b=2b$  слѣдовательно искомой остатокъ есть  $2b$ , т. е. меньшее число  $b$  удвоенное.

269.



средствомъ поставленной между ими почки ; такъ когда сѣи двѣ формулы  $a-b+c$  и  $d-e+f$  помножишь должно , то изъясняется произведеніе такъ  $(a-b+c) \cdot (d-e+f)$ , или  $(a-b+c) \{d-e+f\}$ . Сей способъ очень часто употребляется , потому что изъ онаго видно , изъ какихъ множителей состоиптъ такое произведеніе.

271.

Но что бы показать , какимъ образомъ умноженіе въ самомъ дѣлѣ совершается , то прежде всего надлежитъ примѣчать , что ежели формулу  $a-b+c$  на 2 помножишь должно , то каждой ея членъ особенно на 2 множится и посему выйдетъ  $2a-2b+2c$ .

Сіе же самое дѣлается и со всѣми другими числами ; такъ когда ту же формулу на  $d$  помножишь должно , то получится въ произведеніи  $ad-bd+cd$ .

272.

Здѣсь показали мы , что число  $d$  есть положительное , но ежели отрицатель-

ительнымъ числомъ какъ  $-e$  множить должно, то прежде показанныя правила на память привести надлежитъ, а именно что 2 разные знака въ произведеніи даютъ  $-$ , а два одинакіе  $+$ , почему получимся  $-ae+be-ce$ .

273.

Когда же одну формулу простая ли она будетъ или составная, какъ  $A$  помножить должно, на составную  $d-e$ , то возмемъ сперва самые числа въ разсужденіе, и положимъ, что  $A$  надлежитъ помножить на  $7-3$ ; здѣсь видно, что требуется четырежды взятое  $A$ : буде же сперва возмемъ  $A$  7 разъ, то надлежитъ трижды взятое  $A$  изъ онаго вычесть. Равнымъ образомъ также и вообще когда на  $d-e$  помножить должно, то помножь сперва формулу  $A$  на  $d$ , а потомъ на  $e$  и послѣднее произведеніе вычти изъ перваго, такъ что выйдетъ  $dA-eA$ . Положимъ теперь, что  $A=a-b$ , которое на  $d-e$  надлежитъ умножить, то получимъ мы :

*da*



$$dA = ad - bd$$

$$eA = ae - be$$

$ad - bd - ae + be$  требуемое произведеніе.

274.

Нашедъ произведеніе  $(a-b) \cdot (d-e)$  и о точности онаго , будучи увѣрены представимъ теперь сей умноженія примѣръ яснѣе такимъ образомъ.

$$a - b$$

$$d - e$$

$$ad - bd - ae + be$$

Отсюда усматриваемъ мы , что каждой членъ верхней формулы на каждой исподней помноженъ , нблюдая при томъ вездѣ предписанное о знакахъ правило ; чѣмъ снова подтверждается , ежели бы еще кпо имѣлъ какое вѣ томъ сомнѣніе.

275.

По силѣ сего правила легко будетъ слѣдующей примѣръ вычислить ;  $a + b$  надлежитъ помножить на  $a - b$ .

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a-b \\
 \hline
 aa+ab \\
 -ab-bb \\
 \hline
 \end{array}$$

произведеніе будетъ  $aa - bb$ .

276.

И такъ когда вмѣсто  $a$  и  $b$  положены будутъ опредѣленные числа по произволѣнїю, то будетъ насъ сей примѣръ къ слѣдующей правдѣ: ежели сумма двухъ чиселъ помножится на ихъ разность, произведеніе будетъ разность ихъ квадратовъ, что такимъ образомъ представить можно  $(a+b)(a-b) = aa - bb$ , слѣдственно разность между двумя квадратами числами есть всегда произведеніе изъ суммы двухъ чиселъ на ихъ разность, и можетъ какъ на сумму, такъ и на разность корней раздѣлиться, и по сему первымъ числомъ не будетъ.

277.

Вычислимъ еще слѣдующіе примѣры.

1)

# 176 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

$$1) \quad 2a - 3$$

$$\begin{array}{r} a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ + 4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6 \end{array}$$

$$2) \quad 4aa - 6a + 9$$

$$\begin{array}{r} 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12aa + 18a \\ + 12aa - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

$$3) \quad 3aa - 2ab - bb$$

$$+ 2a - 4b$$

$$6a^3 - 4aab - 2abb$$

$$- 12aab + 8abb + 4b^3$$

$$6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3$$

$$4) \quad aa + 2ab + 2bb$$

$$aa - 2ab + 2bb$$

$$a^4 + 2a^3b + 2aabb$$

$$- 2a^3b - 4aabb - 4ab^3$$

$$+ 2aabb + 4ab^3 + 4b^4$$

$$a^4 + 4b^4$$

$$5) \quad 2aa - 3ab - 4bb$$

$$3aa - 2ab + bb$$

$$6a^4 - 9a^3b - 12aabb$$

$$- 4a^3b + 6aabb + 8ab^3$$

$$+ 2aabb - 3ab^3 - 4b^4$$

$$6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4$$

$$\begin{array}{r}
 6) \quad aa + bb + cc - ab - ac - bc \\
 \quad a + b + c \\
 \hline
 a^3 + abb + acc - a \cdot b \quad aac - abc \\
 -abb \quad acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc \\
 \quad \quad \quad -abc \quad -b \cdot c + bbc + c^3 \\
 \hline
 a^3 - 3abc + b^3 + c^3
 \end{array}$$

278.

Когда больше нежели двѣ формулы одну на другую помноживъ должно будетъ, то легко понять можно, что умноживъ двѣ изъ оныхъ между собою, произведеніе множить потомъ надобно на слѣдующіе, припомъ все равно, какой бы порядокъ наблюдаемъ ни былъ. Когда на примѣрѣ слѣдующее произведеніе изъ 4 хъ множителей <sup>I</sup>(a+b). <sup>II</sup>(aa+ab+bb). <sup>III</sup>(a-b). <sup>IV</sup>(aa-ab+bb) состоящее найпмѣе должно будетъ, то умножь сперва I на II множителя.

$$\begin{array}{r}
 II \quad aa + ab + bb \\
 I \quad a + b \\
 \hline
 a^3 + ab + abb \\
 + aab + abb + b^3 \\
 \hline
 I. II. \quad a^3 + 2aab + 2abb + b^3
 \end{array}$$

Λ

Потомъ

Потомъ умножь III на IV множителя, яко

$$\begin{array}{r}
 \text{IV } aa-ab+bb \\
 \text{III } a-b \\
 \hline
 a^3-aab+abb \\
 -aab+abb-b^3 \\
 \hline
 \text{III.IV. } a^3-2aab+2abb-b^3
 \end{array}$$

Теперь осталось только прежнее произведение I. II умножить на сие III. IV какъ.

$$\begin{array}{r}
 \text{I.II} = a^3+2aab+2abb+b^3 \\
 \text{III.IV} = a^3-2aab+2abb-b^3 \\
 \hline
 a^6+2a^5b+2a^4bb+a^3b^3 \\
 -2a^5b-4a^4bb-4a^3b^3-2aab^4 \\
 +2a^4bb+4a^3b^3+4a^2b^4+2ab^5 \\
 -a^3b^3-2aab^4-2ab^5-b^6 \\
 \hline
 a^6-b^6 \text{ искомое произведение}
 \end{array}$$

279.

Перемѣнимъ теперь порядокъ въ томъ же самомъ примѣрѣ, и сперва I формулу на III, а потомъ II на IV помножимъ, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I. } a+b & & \text{II. } aa+ab+bb \\
 \text{III. } a-b & & \text{IV. } aa-ab+bb \\
 \hline
 aa+ab & & a^4+a^3b+aabb \\
 -ab-bb & & -a^3b-aabb-ab^3 \\
 \hline
 \text{I. III} = aa-bb & & \text{II. IV} = a^4+aabb+b^4
 \end{array}$$

Теперь осталось произведение II. IV,  
помножить на I. III

$$\begin{array}{rcl}
 \text{II. IV} = a^4+aabb+b^4 & & \\
 \text{I. III} = aa-bb & & \\
 \hline
 a^6+a^4bb+aab^4 & & \\
 -a^4bb-aab^4-b^6 & & \\
 \hline
 a^6-b^6 & & \text{искомое произведение.}
 \end{array}$$

280.

Здѣлаемъ еще другимъ порядкомъ  
исчисленіе, и сперва I формулу на IV,  
а потомъ II на III помножимъ, какъ  
слѣдуетъ.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{IV. } aa-ab+bb & & \text{III. } aa+ab+bb \\
 \text{I. } a+b & & \text{II. } a-b \\
 \hline
 & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 a^3 - aab + abb & & a^3 + aab + abb \\
 + aab - abb + b^3 & & - aab - abb - b^3 \\
 \hline
 \text{I. IV} = a^3 + b^3 & & \text{II. III} = a^3 - b^3
 \end{array}$$

Теперь осталось помножить произведение I. IV на II. III.

$$\begin{array}{r}
 \text{I. IV} = a^3 + b^3 \\
 \text{II. III} = a^3 - b^3 \\
 \hline
 a^6 + a^3 b^3 \\
 - a^3 b^3 - b^6 \\
 \hline
 a^6 - b^6
 \end{array}$$

281.

Не бесполезно изъяснить здѣсь сей примѣръ въ числахъ ; пусть будетъ  $a=3$  и  $b=2$  , будетъ  $a+b=5$  ,  $a-b=1$  , потомъ  $aa=9$  ,  $ab=6$  ;  $bb=4$  ,  $aa+ab+bb=19$  и  $aa-ab+bb=7$  , и такъ ищется произведение  $5.19.1.7$  , которое есть  $665$  ;

Но  $a^6=720$  , а  $b^6=64$  слѣдовательно  $a^6-b^6=665$  какъ уже мы и видѣли.



ГЛАВА IV.

О дѣленіи составныхъ количествъ.

199.

Когда дѣленіе означить только надобно будетъ, то употребляется къ сему или обыкновенной знакъ дроби, т. е. когда дѣлимое поверхъ лиѣйки, а дѣлитель подъ оною подписанъ будетъ, или включающаюся они оба въ скобки, и пишется дѣлитель послѣ дѣлимаго, а между ими ставятся двѣ точки: такъ ежели  $a+b$ , раздѣлить должно на  $c+d$ , то частное по первому способу изображается  $\frac{a+b}{c+d}$ , а по второму такъ  $(a+b) : (c+d)$  оба выговаривающа  $a+b$  раздѣлены на  $c+d$ .

283.

Когда составную формулу должно будетъ дѣлить на простую, то дѣлился каждой членъ особенно такимъ образомъ:

$6a-8b+4c$  раздѣленные на 2, дадутъ  $3a-4b+2c$ ; и  $(aa-2ab) : a = a-2b$ . та-  
Л 3
кимъ



кимъ же образомъ  $(a^3 - 2aab + 3abb)$ :  $a = aa - 2ab + 3bb$ , также  $(4aab - 6aac + 8abc)$ :  $(2a) = 2ab - 3ac + 4bc$ , и  $(9aabc - 12abbc + 15abcc)$ :  $(3abc) = 3a - 4b + 5c$ . И такъ далѣе.

284.

Ежели членъ дѣлимаго раздѣлится не можеть, то произшедшее отсюда частное число изъясняется дробью; такъ когда  $a + b$  на  $a$  раздѣлить должно, то получится частное  $1 + \frac{b}{a}$  такожде  $(aa - ab + bb)$ :  $aa = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}$ , еще же когда  $(2a + b)$  на 2 дѣлить должно, то получится  $a + \frac{b}{2}$ , при чемъ примѣчать надлежитъ, что вмѣсто  $\frac{b}{2}$  можно писать  $\frac{1}{2}b$ , ибо  $\frac{1}{2}b$  столь же велика какъ и  $\frac{b}{2}$ ; подобнымъ образомъ  $\frac{b}{3}$  тоже, что  $\frac{1}{3}b$ , и  $\frac{2b}{3}$  тоже, что и  $\frac{2}{3}b$  и такъ далѣе.

285.

Если же дѣлитель самъ состоятъ изъ многихъ членовъ, тогда при дѣленіи больше трудности бываетъ, ибо оно часто дѣйствительно учиниться можеть

можетъ, хотя того и не видно; а когда дѣленіе на цѣло не выходитъ, то должно довольствоваться и тѣмъ, когда частное число, какъ выше упомянуто, подъ видомъ дроби изобразимъ. Разсмотримъ здѣсь одни только тѣ случаи гдѣ дѣленіе дѣйствительно здѣлаться можетъ.

286.

Пусть дѣлимое  $ac - bc$  на дѣлителя  $a - b$  раздѣлить должно; то частное отсюда произшедшее такого свойства быть должно, что ежели оное на дѣлителя  $a - b$  помножится, выйдетъ дѣлимое  $ac - bc$ ; теперь легко видѣть можно, что въ частномъ долженствуетъ быть  $c$ , по тому что иначе не вышло бы  $ac$ , а чтобы узнать, будетъ ли  $c$  совершенное частное число, то помножь онымъ дѣлителемъ, и смотри все ли дѣлимое число вышло или только часть онаго. Въ нашемъ примѣрѣ когда  $a - b$  помножится на  $c$ , то получится  $ac - bc$ , что есть самое дѣлимое, слѣдовательно  $c$  есть совершенное частное число. Равнымъ образомъ

явствуетъ , что  $(aa+ab):(a+b)=a$  ,  
 $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$  , также  $(6aa+ab):$   
 $(2a-3b)=3a$ .

287,

Такимъ образомъ заподлинно найдется одна часть частнаго, и ежели оная помножится на дѣлителя , а отъ дѣлимаго еще нѣчто останется , то осипальное должно еще дѣлится на дѣлителя , и тогда другая частнаго числа часть найдется ; подобнымъ образомъ до шѣхъ поръ продолжая нѣдежитъ , пока все частное число не получится.

Раздѣлимъ на прим.  $aa+3ab+2bb$  на  $a+b$  , по заразъ видно , что частное должно въ себѣ содержать членъ  $a$  ; ибо иначе не вышло бы  $aa$  ; но помноживъ дѣлителя  $a+b$  на  $a$  выйдетъ  $aa+ab$  , которое когда изъ дѣлимаго вычтется , останется еще  $2ab+2bb$  , что еще на  $a+b$  дѣлится должно гдѣ заразъ видно ,

что въ частномъ  $2b$  стоять должны , помноживъ теперь  $2b$  на  $a+b$  выходящю поочно  $2ab+2bb$  слѣдовательно искомое частное есть  $a+2b$  , которое будучи помножено на дѣлителя  $a+b$  даетъ дѣлимое. Все сие дѣйствіе представляется такимъ образомъ.

$$\begin{array}{r}
 a+b \left\{ \begin{array}{l} aa+3ab+2bb \\ aa+ab \\ \hline +2ab+2bb \\ +2ab+2bb \\ \hline \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a+2b \\ \\ \end{array} \right.
 \end{array}$$

288.

Для облегченія сего дѣйствія берется часть дѣлителя, какъ здѣсь  $a$  , которая и пишется съ начала , а позади сихъ буквъ пишется дѣлимое такимъ порядкомъ , что вышшіе степени сей же буквы  $a$  ставятся съ начала , какъ изъ слѣдующаго примѣра видѣть можно.

$$\begin{array}{r}
 a-b \left\{ \begin{array}{l} a^3-3aab+3abb-b^3 \\ a^3-aab \\ \hline \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} aa-2ab+bb \\ \\ \end{array} \right.
 \end{array}$$

л 5 -2aab

$$-2aab + 3abb$$

$$-2aab + 2abb$$

---


$$+abb - b^3$$

$$+abb - b^3$$


---

---

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $  \begin{array}{l}  a+b \left\{ \begin{array}{l} aa-bb \\ aa+ab \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a-b \\ \end{array} \right. \left  \begin{array}{l} 3a-2b \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 18aa-8bb \\ 18aa-12ab \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 6a+4b \\ \end{array} \right. \\  \hline  -ab-bb \\  -ab-bb \\  \hline  \end{array}  $ | $  \begin{array}{l}  \hline  +12ab - 8bb \\  +12ab - 8bb \\  \hline  \end{array}  $ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|

---

$$\begin{array}{l}
 a+b \left\{ \begin{array}{l} a^3+b^3 \\ a^3+aab \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} aa-ab+bb \\ \end{array} \right. \\
 \hline
 -aab+b^3 \\
 -aab-abb \\
 \hline
 +abb+b^3 \\
 +abb+b^3 \\
 \hline
 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{l}
 2a-b \big) 8a^3 - b^3 \big( 4aa + 2ab + bb \\
 \quad 8a^3 - 4aab \\
 \hline
 \quad +4aab - b^3
 \end{array}$$

$$\underline{+4aab-2abb}$$

$$+2abb-b^3$$

$$+2abb-b^3$$

$$(aa-2ab+bb)a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4(aa-2ab+bb)$$

$$\underline{a^4-2a^3b+aabb}$$

$$-2a^3b+5aabb-4ab^3$$

$$\underline{-2a^3b+4aabb-2ab^3}$$

$$+aabb-2ab^3+b^4$$

$$\underline{+aabb-2ab^3+b^4}$$

$$(aa-2ab+4bb)a^4+4aabb+16b^4(aa+2ab+4bb)$$

$$\underline{a^4-2a^3b+4aabb}$$

$$+2a^3b+16b^4$$

$$\underline{+2a^3b^2-4aabb+8ab^3}$$

$$+4aabb-8ab^3+16b^4$$

$$\underline{+1aabb-8ab^3+16b^4}$$

$$(aa-2ab+2bb)a^4+4b^4(aa+2ab+2bb)$$

$$\underline{a^4-2a^3b+2aabb}$$

$$+2a$$

$$\begin{array}{r}
 +2a^3b - 2aabb + 4b^4 \\
 +2a^3b - 4xabb + 4ab^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +2aabb - 4ab^3 + 4b^4 \\
 +2aabb - 4ab^3 + 4b^4
 \end{array}$$

$$(1 - 2x + xx)(1 - 5x + 10xx - 10x^3 + 5x^4 - x^5)(1 - 3x + 3xx - x^3)$$

$$1 - 2x + xx$$

$$-3x + 9xx - 10x^3$$

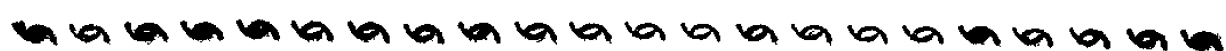
$$-3x + 6xx - 3x^3$$

$$+3xx - 7x^3 + 5x^4$$

$$+3xx - 6x^3 + 3x^4$$

$$-x^3 + 2x^4 - x^5$$

$$-x^3 + 2x^4 - x^5$$



## ГЛАВА V.

О разрѣщеніи дробей на безконечные ряды.

289.

Когда дѣлимое на дѣлителя раздѣлится не можетъ, то изъясняется частное  
число

число дробью, какъ уже упомянуто. Такъ, когда 1 цу на  $1-a$  раздѣлить должно, то получится сѣя дробь  $\frac{1}{1-a}$ ; между пѣмъ однакожъ дѣленіе по прежнимъ правиламъ дѣлается, и продолжается по изволенію, и тогда подлинное частное число, хотя въ разныхъ формулахъ, выходитъ долженствуешъ.

290.

А что бы показать, то раздѣлимъ дѣйствительно дѣлимое 1 цу на дѣлителя  $1-a$ , какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{r}
 1-a \overline{) 1} \quad \left( 1 + \frac{a}{1-a} \text{ или } 1-a \right) \overline{) 1} \quad \left( 1 + a + \frac{aa}{1-a} \right. \\
 \underline{1 \quad a} \qquad \qquad \qquad \underline{1-a} \\
 \text{остаток: } +a \qquad \qquad \qquad +a \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{+a-aa} \\
 \qquad \qquad \qquad \text{остаток: } +aa
 \end{array}$$

Для сысканія большаго числа формулъ раздѣлимъ  $aa$  на  $1-a$ , какъ.

$$\begin{array}{r}
 1-a \overline{) aa} \quad \left( aa + \frac{a^3}{1-a} \right. \\
 \underline{aa - a^3} \\
 +a^3
 \end{array}$$

1-a)



$$\frac{(1-a)a^3}{a^3-a^4} \left( a^3 + \frac{a^4}{1-a} \right) \text{ еще } \frac{(1-a)a^4}{a^4-a^5} \left( a^4 + \frac{a^5}{1-a} \right) + a^4 + a^5 \text{ и прощ.}$$

291.

Отсюда видимъ мы , что дробь  $\frac{1}{1-a}$  чрезъ всѣ слѣдующіе формулы изъяслена быть можетъ I)  $1 + \frac{a}{1-a}$  ; II)  $1 + a + \frac{a^2}{1-a}$  ; III)  $1 + a + aa + \frac{a^3}{1-a}$  ; IV)  $1 + a + aa + a^3 + \frac{a^4}{1-a}$  ; V)  $1 + a + aa + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1-a}$  и прощ. возми въ рассужденіе I Формулу  $1 + \frac{a}{1-a}$  , понеже і споль же велика какъ  $\frac{1-a}{1-a}$ , слѣдовательно  $1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} + \frac{a}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$ , во второй формулѣ  $1 + a + \frac{aa}{1-a}$  приве-ди цѣлую часть къ тому же знаменателю  $1-a$  , то получится  $\frac{1-aa}{1-a}$  придай къ сему  $\frac{+aa}{1-a}$  будетъ  $\frac{1-aa+aa}{1-a}$  т. е.  $\frac{1}{1-a}$ .

Для третей формулы  $1 + a + aa + \frac{a^3}{1-a}$  , когда цѣлая часть къ тому же знаменателю  $1-a$  приведена будетъ , дастъ  $\frac{1-a^3}{1-a}$ , къ ней придай дробь  $\frac{a^3}{1-a}$  сумма будетъ  $\frac{1}{1-a}$  откуда явствуетъ, что

что всѣ сѣ формулы въ самомъ дѣлѣ  
тоже значатъ , что и данная дробь  $\frac{1}{1-a}$

292.

Такимъ образомъ сѣ дѣйствіе столь  
далеко продолжать можно, какъ за благо  
рассудится , не имѣя нужды дальное дѣ-  
лать исчисленіе , такъ будемъ  $\frac{1}{1-a} = 1 + a$   
 $+ aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$  да и еще  
далѣе дѣйствіе сѣ продолжать можно ни-  
когда не преставаая, чрезъ что предложен-  
ная дробь  $\frac{1}{1-a}$  обратится въ безконечной  
рядъ какъ  $1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7$   
 $+ a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}$  и прот. бесконе-  
чно , и о семъ безконечномъ ряду съ  
достоувѣрностію утверждать можно ,  
что онъ столь же великъ какъ и дробь  
 $\frac{1}{1-a}$ .

293.

Хотя сѣ съ начала и весьма удиви-  
тельно кажется , однакожъ разсмотрѣвъ  
нѣкоторые случаи , будемъ вразумитель-  
но ; положимъ сперва  $a=1$ , то выдемъ  
машъ рядъ  $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

и пропч. безконечно, которой дроби  $\frac{1}{1-1}$  т. е.  $\frac{1}{0}$  равенъ быть долженствуетъ. Но мы уже видѣли что  $\frac{1}{0}$  есть безконечно большое число, что и симъ такожде подтверждается.

Когда же возьмется  $a=2$ , то будетъ нашъ рядъ  $=1+2+4+8+16+32+64$  и пропч. безконечно, которой долженъ быть равенъ  $\frac{1}{1-2}$  т. е.  $\frac{1}{-1} = -1$ , что не сходнымъ быть кажется.

Но надлежитъ примѣчать, что ежели въ вышепоказанномъ ряду остановимся пожелаешь, то завсегда прибавлять еще должно дроби. Такъ когда у 64 остановимся, то къ  $1+2+4+8+16+32+64$  еще сѣю дроби  $\frac{128}{1-2}$  т. е.  $\frac{128}{-1} = -128$  приставимъ надлежитъ; по чему выйдетъ  $127-128$  т. е.  $-1$ .

294.

Сіе примѣчать должно когда вмѣсто  $a$ , берутся числа больше 1цы; а есть ли вмѣсто  $a$  возмущся меньшія числа,  
то

по все легко уразумѣть можно. Пусть будетъ на прим.  $a = \frac{1}{2}$ , то получится  $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ , кошорые слѣдующему ряду равны будутъ  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$  и проч. безконечно. Когда теперь возмущся только два члена  $1 + \frac{1}{2}$ , то не достаетъ  $\frac{1}{2}$ , когда же возмущся 3, то будетъ  $1\frac{3}{4}$ , и не достаетъ  $\frac{1}{4}$ ; 4 члена взяшые вмѣстѣ дѣлаютъ  $1\frac{7}{8}$ , и не достаетъ еще  $\frac{1}{8}$ ; откуда видно, что завсегда не достатокъ меньше становится, слѣдователь-но ежели рядъ безконечно продолжится, то совѣмъ никакого недоставка не будетъ.

295.

Положи  $a = \frac{1}{3}$ , то будетъ наша дробь  $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ , кошорой слѣдующей рядъ равенъ будетъ  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$  и проч. безконечно. Возми 2 члена и выдеиъ  $1\frac{1}{3}$ , и по сему не достаетъ  $\frac{1}{6}$ ; возми 3 будетъ  $1\frac{4}{9}$ , не достаетъ  $\frac{1}{18}$ ; возми 4 члена, выдеиъ  $1\frac{13}{27}$ , и не достаетъ еще  $\frac{1}{54}$ ; когда теперь погрѣшность въ при-  
М  
раза

раза часъ отъ часу меньше становится, то она наконецъ уничтожится.

296.

Положимъ  $a = \frac{1}{3}$  то будетъ дробь  $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$   $= 3$ , а рядъ будетъ  $= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$  и проч. бесконечно; взявъ сперва  $1 + \frac{2}{3}$  не достанетъ еще  $1 + \frac{1}{3}$ , взявъ 3 члена, будетъ  $2 + \frac{1}{9}$ , и не достанетъ еще  $\frac{8}{9}$ ; возми 4 члена будетъ  $2 + \frac{11}{27}$ , не достаетъ еще  $\frac{16}{27}$ .

297.

Пусть будетъ  $a = \frac{1}{4}$ , то будетъ дробь  $\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{3}$ ; а рядъ будетъ  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$  и проч. возми 2 члена, будетъ  $1 + \frac{1}{4}$ , слѣд. не достаетъ  $\frac{1}{12}$ , возми 3, выйдетъ  $1 + \frac{5}{16}$ , и не достаетъ еще  $\frac{1}{48}$  и проч.

298.

равнымъ образомъ и сія дробь  $\frac{1}{1+a}$  въ бесконечной рядъ обратится, когда числитель 1 на знаменателя  $1+a$  дѣйствительно раздѣлится, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{r}
1+a \Big\} 1 \Big\{ 1-a+aa-a^3+a^5 \\
\quad \quad \quad 1+a \Big\{ \\
\hline
-a \\
-a-aa \\
\hline
+aa \\
aa+a^3 \\
\hline
-a^5 \\
-a^3-a^4 \\
\hline
+a^4 \\
+a^4+a^5 \\
\hline
-a^5 \text{ и проч.}
\end{array}$$

По сему наша дробь  $\frac{1}{1+a}$  равна сему  
 бесконечному ряду  $1-a+aa-a^3+a^4-a^5$   
 $+a^6-a^7$  и проч.

299.

Положи  $a=1$ , то получится сѣ  
 примѣчанія доспойное уравненіе  $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$   
 $=1-1+1-1+1-1+1$  и проч. бесконе-  
 чно, что противорѣчишь кажется; ибо ког-  
 да рядъ на  $-1$  кончится, то дасть  
 онъ 0, а ежели на  $+1$  перервется, то

М 2

дасть

дасть 1. Но сіе ошудя понять можно, когда бесконечно продолжая будешь не останавливаясь ни при  $-1$  ниже при  $+1$ , то тогда сумма ни 1 ни 0, но среднее между ими выйдет  $\frac{1}{2}$ .

300.

Пусть будетъ  $a = \frac{1}{2}$ , то наша дробь  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$  равна будетъ сему ряду  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$  и проч. бесконечно. Возми два члена, то выйдетъ  $\frac{1}{2}$  котораго  $\frac{1}{6}$  частью меньше, взявъ 3 члена получишь  $\frac{3}{4}$  коя больше  $\frac{1}{12}$  частью, взявъ 4 получится  $\frac{5}{8}$  что меньше  $\frac{1}{24}$  частицею и проч.

301.

Положивъ  $a = \frac{1}{3}$  будетъ наша дробь  $\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$  коей слѣдующей рядъ равенъ  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$  и проч. бесконечно; возми 2 члена получишь  $\frac{2}{3}$ , кои меньше  $\frac{1}{12}$ ю, и взявъ 3 члена выйдетъ  $\frac{7}{9}$ , кои больше  $\frac{1}{36}$ ю; взявъ 4 члена получится  $\frac{20}{27}$ , кои меньше  $\frac{1}{108}$  частью и проч.

302.

302.

Дробь  $\frac{1}{1+a}$  можно еще инымъ образомъ разрѣшить ; а именно когда 1 на  $a+1$  раздѣлится такимъ образомъ.

$$\begin{array}{r}
 a+1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1+\frac{1}{a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} \\ - \frac{1}{a} \\ - \frac{1}{a} - \frac{1}{aa} \\ + \frac{1}{aa} \\ + \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} \\ - \frac{1}{a^3} \\ - \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} \\ + \frac{1}{a^4} \\ + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} \\ - \frac{1}{a^6} \text{ и проч.} \end{array} \right.
 \end{array}$$

И такъ наша дробь  $\frac{1}{a+1}$  равна слѣдующему ряду,  $\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^6} - \frac{1}{a^6}$  и проч. бесконечно. Положивъ  $a = 1$  получится сей рядъ  $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$  и проч. какъ и прежде ,



Положивъ  $a=2$  получится сей рядъ  
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$  и проч.

303.

Равнымъ образомъ можно сію дробь  $\frac{c}{a+b}$  вообще обратить въ слѣдующей рядъ, такимъ образомъ.

$$\begin{array}{r}
 a+b \left\{ \begin{array}{l} c \\ c + \frac{b_c}{a} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} \\ - \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\ + \frac{bbc}{aa} \\ + \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3 c}{a^3} \end{array} \right. \\
 \hline
 - \frac{bc}{a} \\
 \hline
 - \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\
 \hline
 + \frac{bbc}{aa} \\
 \hline
 + \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3 c}{a^3} \\
 \hline
 - \frac{b^3 c}{a^3} \text{ и проч.}
 \end{array}$$

Откуда получаемъ мы уравненіе въ слѣдующемъ ряду  $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3 c}{a^4}$  и проч. бесконечно. Пусть будетъ  $a=2$ ,  $b=4$  и  $c=3$ , то получится  $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$  и проч. пусть  $a=10$ ,

$b=1$  и  $c=11$ , то получимъ  $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1$   
 $= \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$  и пропч. взявъ одинъ  
 членъ будетъ  $\frac{11}{10}$ , больше  $\frac{1}{10}$  частью, взявъ  
 2 члена выдетъ  $\frac{99}{100}$ , кои меньше  $\frac{1}{100}$ ю,  
 взявъ 3 члена получится  $\frac{1001}{1000}$  кои больше  
 $\frac{1}{1000}$  частью и пропч.

304.

Когда дѣлитель изъ многихъ частей  
 состоитъ, то равнымъ образомъ дѣленіе  
 продолжается бесконечно. Такъ ежелибы  
 сія дробь  $\frac{1}{1-a+aa}$  была предложена, то  
 бесконечной рядъ ей равной находится  
 такимъ образомъ.

$$1-a+aa \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1-a+aa \end{array} \right. \begin{array}{l} ) 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ и пропч.} \\ \hline \end{array}$$

$$+a-aa$$

$$+a-aa+a^3$$

$$-a^3$$

$$-a^3+a^4-a^6$$

$$-a^4+a^5$$

$$-a^4+a^5-a^7$$

$$+a^7$$

М 4

$$+a^5$$

$$\begin{array}{r}
 +a^6 - a^7 + a^8 \\
 \hline
 +a^7 - a^8 \\
 +a^7 - a^8 + a^9 \\
 \hline
 -a^9
 \end{array}$$

и проч.

И такъ имѣемъ мы сіе уравненіе  $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$  и прочая безконечно. Возми здѣсь  $a=1$ , то получится такой рядъ  $1=1+1-1-1+1, +1-1-1+1+1$  и проч., который рядъ содержишь въ себѣ прежней  $1-1+1-1+1$  и проч. дважды; но прежней рядъ былъ равенъ  $\frac{1}{2}$ , то не удивительно, что сей  $=2.\frac{1}{2}$  т. е. 1 цу сосставляешь.

Положивъ  $a=\frac{1}{2}$ , получится сіе уравненіе  $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$  и

проч. положивъ  $a=\frac{1}{3}$  получится такое уравненіе  $\frac{1}{\frac{8}{4}}$  или  $1:\frac{7}{9}=\frac{9}{7}=1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$  и

проч. возми здѣсь 4 члена, то получишь  $\frac{104}{81}$  которая меньше  $\frac{1}{587}$  ю, нежели  $\frac{9}{7}$ ; положивъ еще  $a=\frac{2}{3}$  получится сіе уравненіе

нїе  $\frac{1}{7} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{18}{81} + \frac{84}{729}$  и проч., кошо-

рой рядъ прежнему равенъ, чего ради и такъ вычи верхней изъ сею, то получи-  
ся  $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$  и проч. гдѣ 4 члена  
вмѣстѣ дѣлають  $\frac{7}{81}$ .

305.

Такимъ образомъ можно всѣ дроби  
обращать въ безконечные ряды, что не  
только великую пользу часто приносишь,  
но и само по себѣ очень доспомятно:  
ибо безконечной рядъ не смотря на то,  
что никогда не пресѣчется, но еще и  
опредѣленное знаменованіе имѣть мо-  
жетъ. Изъ сего основанія выведены наи-  
важнѣйшіе изобрѣшенія, что ради сїя  
матерія заслуживаетъ быть рассмотрена  
съ наибольшимъ вниманіемъ.

~~~~~

ГЛАВА VI.

О квадратахъ составныхъ количествъ.

306.

Когда понадобится найти квадратъ со-
ставнаго количества, то надлежитъ

М 5

оное

202 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

оное только само собою помножить ,
произведеніе будетъ квадратъ онаго.

Такимъ образомъ находится квадратъ
изъ $a+b$, какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a+b \\
 \hline
 aa+ab \\
 +ab+bb \\
 \hline
 aa+2ab+bb
 \end{array}$$

307.

И по сему ежели корень состоитъ
изъ двухъ частей , кои сложены вмѣстѣ
какъ $a+b$, то слагается квадратъ 1 изъ
квадратовъ каждой части ш. е. aa и bb ;
2, присовокупляется еще къ сему двойное
произведеніе обѣихъ частей , а именно
 $2ab$, и цѣлая сумма $aa+2ab+bb$ есть
квадратъ изъ $a+b$.

Пусть будетъ наприм. $a=10$, $b=3$,
такъ что квадратъ 13 ши найши должно,
то будетъ оной $=100+9+60=169$.

308.

308.

Помощію сея формулы легко можно находить квадраты нарочито большихъ чиселъ , когда оныя на двѣ части раздроблены будутъ.

Такъ для нахожденія квадрата изъ 57, раздоби сѣ число на $50+7$, квадратъ его будетъ $=2500+700+49 = 3249$.

309.

Отсюда видно , что квадратъ изъ $a+1$ будетъ $aa+2a+1$; когда же квадратъ изъ a есть aa , то квадратъ изъ $a+1$ найдется , ежели къ оному придася $2a+1$; при чемъ надлежитъ примѣчать , что $2a+1$ есть сумма обоихъ корней a и $a+1$. И такъ когда квадратъ 10 ми есть 100 , то квадратъ 11 ми будетъ $=100+21$, и когда квадратъ 57 ми есть 3249, то будетъ квадратъ 58 ми $=3249+115=3364$, а квадратъ 59 ми $=3364+117=3481$, и наконецъ квадратъ 60 ми $=3481+119=3600$ и проч.

310.

310.

Квадратъ изъ составнаго количества какъ $a+b$ означается такъ $(a+b)^2$ и по сему будетъ $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ откуда производятся слѣдующія уравненія :

$$(a+1)^2 = aa + 2a + 1, \quad (a+2)^2 = aa + 4a + 4, \quad (a+3)^2 = aa + 6a + 9; \quad (a+4)^2 = aa + 8a + 16 \text{ и такъ далѣе.}$$

311.

Ежели корень будетъ $a-b$, то получится онаго квадратъ $aa - 2ab + bb$, которой состоитъ изъ квадратовъ обѣихъ частей, изъ суммы коихъ двойное произведеніе вычтено.

Пусть на прим. $a=10$, $b=1$, то будетъ квадратъ 9 ти $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Имѣя сіе уравненіе $(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$, будетъ $(a-1)^2 = aa - 2a + 1$, что найдется, ежели изъ aa вычтется $2a-1$, а сіе есть сумма корней a и $a-1 = 2a-1$.

Пусть

Пусть на прим. $a=50$, будетъ $aa=2500$, $a-1=49$, и такъ $49^2=2500-99=2401$.

313.

Сіе дробями изъяснить также можно ; ибо когда возмется за корень $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$ [которые составляющъ 1цу] , то выдешъ квадратъ $=\frac{9}{25}+\frac{4}{25}+\frac{12}{25}=\frac{25}{25}=1$; квадратъ изъ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ [= $\frac{1}{6}$] будетъ $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

314.

Когда корень изъ многихъ членовъ состоишъ, то можно равнымъ образомъ опредѣлить его квадратъ, такъ изъ $a+b+c$ найдется квадратъ какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{r}
 a+b+c \\
 a+b+c \\
 \hline
 aa+ab+ac \qquad +bc \\
 +ab+ac +bb+bc +cc \\
 \hline
 aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc
 \end{array}$$

Откуда явствуетъ, что оной состоишъ во первыхъ изъ квадратовъ каждой
часши

206 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

части корня , и изъ удвоенныхъ произведеній каждахъ двухъ частей между собою.

315.

А чтобы сіе изъяснить примѣромъ, то раздѣлимъ число 256 на 3 части 200 + 50 + 6 , по чему квадратъ его изъ слѣдующихъ частей составленъ.

40000	ко ш п о р о й р а в е н ѣ с е м у п р о и з в е д е н і ю	256
2500		256
36		-----
20000		1536
2400		1280
600		512
-----		-----
65536		65536

316.

Когда нѣкоторые члены въ корнѣ будутъ отрицательные , то по сему же правилу найдется его квадратъ, когда только на двойныя произведенія смотрѣть будешь , какой каждому знакъ принадлежишь. Такъ изъ $a-b-c$ будетъ квадратъ

aa

$aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$; слѣдовательно
когда число 256 представится такимъ
образомъ $300 - 40 - 4$, то будетъ.

+90000	
1600	-24000
320	-2400
16	<hr/> -26400
<hr/> +91936	
-26400	
<hr/> +65536.	

~~~~~

## ГЛАВА. VII

О извлечении квадратныхъ корней въ со-  
ставныхъ количествахъ.

317.

Дабы сему дать здѣсь надежное правило,  
то надлежитъ намъ взять въ подробное  
разсужденіе квадраты изъ корня  $a + b$ ,  
которой есть  $aa + 2ab + bb$ , и искать,  
какимъ образомъ изъ даннаго квадрата  
корень вывести можно: къ чему слѣдую-  
щія разсужденія потребны.

318.

318.

Вопервыхъ ежели квадрапѣ  $aa + 2ab + bb$  изъ многихъ членовъ состоитъ, то за подлинно извѣстно, что корень имѣть долженъ больше нежели одинъ членъ, и естли квадрапѣ написанъ будепѣ такъ, что степени одной буквы какъ  $a$  за всегда умяются, то явно, что первой членъ будепѣ квадрапѣ изъ перваго члена корня, какъ въ нашемъ теперѣ примѣрѣ первой членъ естѣ квадрапѣ  $aa$  то явствуетъ, что первой корня членъ долженъ бытъ  $a$ .

319.

Когда первой членъ корня т. е.  $a$  найденъ, то рассматривай остальные въ квадрапѣ знаки, кои суть  $2ab + bb$  дабы увидѣть, какимъбы образомъ отпуда впо-  
рую корня часть, копорая естѣ  $b$  най-  
ти можно было. Здѣсь примѣчаемъ мы,  
что остатокъ  $2ab + bb$  представленъ  
бытъ можетъ чрезъ произведеніе  $2a + b$  въ  
и когда сей остатокъ имѣетъ два мно-  
жителя

жителя  $2a+b$  и  $b$ , по послѣдней  $b$  найдется, ежели остатокъ  $2ab+bb$  на  $2a+b$  раздѣлился.

320.

И такъ для нахожденія второй корня части должно остатокъ на  $2a+b$  раздѣлить, и частное будетъ вторая корня часть. Въ семъ дѣленіи надлежитъ примѣчать, что  $2a$  есть удвоенная найденная уже первая корня часть  $a$ , а другой членъ  $b$  хотя и не извѣстенъ, и его мѣсто порожнее должно оставить; но понеже дѣленіе сдѣлать также можно, ежели только на первой членъ  $a$  смотрѣть будемъ, а какъ скоро частное найдется, которое здѣсь есть  $b$ , то онъ на порожнее мѣсто должно поставитъ и дѣленіе совершать.

321.

Изчисленіе, въ которомъ изъ прежде показаннаго квадрата  $aa+2ab+bb$  корень находится, производится такимъ образомъ.

Н

$aa+$

$$\begin{array}{r}
 aa + 2ab + bb \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b \\ aa \end{array} \right. \\
 \hline
 2a + b \big) 2ab + bb \\
 \quad 2ab + bb \\
 \hline
 \end{array}$$

322.

Такимъ образомъ можно извлекать квадратной корень и изъ другихъ составныхъ формулъ , ежели оныя будутъ только квадраты , какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно:

$$\begin{array}{r}
 aa + 6ab + 9bb \quad \left\{ \begin{array}{l} a + 3b \\ aa \end{array} \right. \\
 \hline
 2a + 3b \big) 6ab + 9bb \\
 \quad 6ab + 9bb \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{r}
 4aa - 4ab + bb \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a - b \\ 4aa \end{array} \right. \\
 \hline
 4a - b \big) -4ab + bb \\
 \quad -4ab + bb \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9pp + 24pq + 16qq \quad \left\{ \begin{array}{l} 3p + 4q \\ 9pp \end{array} \right. \\
 \hline
 6p + 4q \big) + 24pq + 16qq \\
 \quad + 24pq + 16qq \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25xx - 60x + 36 \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 6 \\ 25xx \end{array} \right. \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x-6) -60x+36 \\ \underline{-60x+36} \end{array}$$

323.

Ежели послѣ дѣленія останется еще остатокъ , то значить сѣ , что корень состоятъ больше нежели изъ двухъ членовъ , и тогда два найденные уже члена вмѣстѣ за первую часть почитаются , и изъ остатка равнымъ образомъ , какъ и прежде, слѣдующей корня членъ находится , какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ явствуетъ:

$$\begin{array}{r} aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b+c \\ a \end{array} \right. \\ \hline 2a+b) +2ab-2ac-2bc+bb+cc \\ \quad +2ab \qquad \qquad +bb \\ \hline 2a+2b-c) -2ac-2bc+cc \\ \qquad \qquad -2ac-2bc+cc \\ \hline a^4+2a^3+3aa+2a+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} aa+a+1 \\ a^4 \end{array} \right. \\ \hline 2aa+a) 2a^4+3aa \\ \qquad \quad 2a^3+aa \\ \hline \end{array}$$

Н 2

2aa

$$\begin{array}{r}
2aa+2a+1 \big) +2aa+2a+1 \\
\quad +2aa+2a+1 \\
\hline
a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4 \left\{ \begin{array}{l} aa-2ab-2bb \\ a^4 \end{array} \right. \\
\hline
2aa-2ab \big) -4a^3b+8ab^3 \\
\quad -4a^3b+4aabb \\
\hline
2aa-4ab-2bb \big) -4aabb+8ab^3+4b^4 \\
\quad -4aabb+8ab^3+4b^4 \\
\hline
a^5-6a^4b+15a^3bb-20a^2b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \left\{ \begin{array}{l} a^5 \\ a^6 \end{array} \right. \\
\hline
\phantom{a^5-6a^4b+15a^3bb-20a^2b^3+15aab^4-6ab^5+b^6} -3aab+3abb-b^3 \\
2a^3-3a^2b \big) -6a^4b+15a^3bb \\
\quad -6a^4b+9a^3bb \\
\hline
2a^3-6a^2b+3abb \big) +6a^4bb-20a^3b^3+15aab^4 \\
\quad +6a^4bb-18a^3b^3+9aab^4 \\
\hline
2a^5-6aab+6abb-b^3 \big) -2a^3b^5+6aab^4-6ab^5+b^6 \\
\quad -2a^3b^3+6aab^4-6ab^5+b^6
\end{array}$$

324.

Изъ сего правила слѣдуетъ теперь и то, которое въ арифметическихъ книгахъ для извлеченія квадратнаго корня преподается, какъ:

$$\begin{array}{r}
 5 \overline{) 29} \{ 23, \\
 4 \overline{) \phantom{29}} \{ \\
 43 \overline{) 129} \\
 \underline{129}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 17 \overline{) 64} \{ 42; \\
 16 \overline{) \phantom{64}} \{ \\
 82 \overline{) 164} \\
 \underline{164}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 23 \overline{) 04} \{ 48; \\
 16 \overline{) \phantom{04}} \{ \\
 88 \overline{) 704} \\
 \underline{704}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 47 \overline{) 96} \{ 64 \\
 36 \overline{) \phantom{96}} \{ \\
 124 \overline{) 496} \\
 \underline{496}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 9 \overline{) 604} \{ 98; \\
 8 \overline{) \phantom{604}} \{ \\
 188 \overline{) 1504} \\
 \underline{1504}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 56} \mid 25 \{ 125 \\
 1 \overline{) \phantom{56}} \mid \phantom{25} \{ \\
 22 \overline{) 56} \\
 \underline{44} \\
 245 \overline{) 1225} \\
 \underline{1225}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 99 \overline{) 80} \mid 01 \{ 999, \\
 81 \overline{) \phantom{80}} \mid \phantom{01} \{ \\
 189 \overline{) 1880} \\
 \underline{1701} \\
 1989 \overline{) 17901} \\
 \underline{17901}
 \end{array}$$

325.

Ежели при концѣ случится остатокъ , то значить сѣ , что предложенное число не квадратъ ; слѣд: корня его извѣсти не лзя. Въ такомъ случаѣ употребляется преждевременно коренной знакъ , который попереди формулы ста-



вится , а самая формула включается въ скобки. И такъ корень изъ  $aa+bb$  означается чрезъ  $\sqrt{aa+bb}$  ; а  $\sqrt{1-xx}$  показывается квадратной корень изъ  $1-xx$ . На мѣсто сего кореннаго знака можно употреблять ломаной показатель  $\frac{1}{2}$  ; такимъ образомъ  $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$  будетъ также означать квадратной корень изъ  $aa+bb$ .



## ГЛАВА VIII.

О вычисленіи неизвлекаемыхъ чиселъ.

326.

Есѣли двѣ или больше неизвлекаемыя формулы должно будетъ сложить въ одну сумму , то чинится сѣ , какъ выше показано , ставя всѣ члены вмѣстѣ съ ихъ знаками ; при сокращеніи ихъ только примѣчать надлежитъ , что вмѣсто  $\sqrt{a} + \sqrt{a}$  пишется  $2\sqrt{a}$  , и что  $\sqrt{a} - \sqrt{a}$  другъ друга уничтожаютъ , или дѣлаютъ ничево. Слѣдовательно формулы  $3 + \sqrt{2}$  и  $1 + \sqrt{2}$  сложенные вмѣстѣ даютъ

дають  $4+2\sqrt{2}$  или  $4+\sqrt{8}$  ; также  $5+\sqrt{3}$  и  $4-\sqrt{3}$  сложенные вмѣстѣ дѣлають 9;  $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$  составляютъ въ суммѣ  $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ .

327.

Вычитаніе не имѣетъ также ни малой трудности : ибо въ немъ перемѣняются только знаки нижняго числа , которое вычитать должно въ прошивные, какъ изъ слѣдующаго примѣра видно. Изъ  $4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6}$  вычесть долж.

$$\begin{array}{r} 1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+5\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

При умноженіи примѣчать должно только, что  $\sqrt{a}$  умноженной на  $\sqrt{a}$  даетъ  $a$  ; если же подъ знакомъ  $\sqrt{\phantom{x}}$  будутъ стоять не одинакіе числа какъ  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$ , то они въ произведеніи дадутъ  $\sqrt{ab}$ ; по чему слѣдующіе примѣры вычислены быть могутъ , какъ:

$$\begin{array}{r}
 1 + \sqrt{2} \\
 1 + \sqrt{2} \\
 \hline
 \sqrt{2} + 2 \\
 1 + \sqrt{2} \\
 \hline
 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 + 2\sqrt{2} \\
 2 - \sqrt{2} \\
 \hline
 8 + 4\sqrt{2} \\
 -4\sqrt{2} - 4 \\
 \hline
 8 - 4 = 4
 \end{array}$$

329.

Сіе же самое имѣетъ мѣсто и при невозможныхъ количествахъ какъ,  $\sqrt{-a}$ ; при чемъ примѣчается, что  $\sqrt{-a}$  умноженной на  $\sqrt{-a}$  въ произведеніи даетъ  $-a$ . Еслилибъ должно было искать кубъ числа  $-1 + \sqrt{-3}$ , то учинился сіе, когда даннаго числа квадратъ умножится на то же данное число  $-1 + \sqrt{-3}$  какъ.

$$\begin{array}{r}
 -1 + \sqrt{-3} \\
 -1 + \sqrt{-3} \\
 \hline
 +1 - \sqrt{-3} \\
 -\sqrt{-3} - 3 \\
 \hline
 1 - 2\sqrt{-3} - 3 = -2 - 2\sqrt{-3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -2 - 2\sqrt{-3} \\
 -1 + \sqrt{-3} \\
 \hline
 +2 + 2\sqrt{-3} \\
 -2\sqrt{-3} - 2(-3) \\
 \hline
 2 + 6 = 8
 \end{array}$$

330.

330.

При дѣленіи поставь только просто дробь, которую потомъ можно превратить въ другую формулу, такъ что знаменатель будетъ раціональной (numerus rationalis); ибо когда знаменатель будетъ  $a + \sqrt{b}$  и дробь съ верху и съ низу помножится на  $a - \sqrt{b}$ , то знаменатель произойдетъ  $aa - b$ , которой уже кореннаго знака не имѣетъ, напр: раздѣли  $3 + 2\sqrt{2}$  на  $1 + \sqrt{2}$ , то будетъ  $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ , помножь теперь съ верху и съ низу на  $1 - \sqrt{2}$  то получится на мѣсто числителя а мѣсто знаменателя.

$$\begin{array}{r} 3 + 2\sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ \hline 3 + 2\sqrt{2} \\ - 3\sqrt{2} - 2.2 \\ \hline 3 - \sqrt{2} - 4 = -\sqrt{2} - 1; \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ \hline 1 + \sqrt{2} \\ - \sqrt{2} - 2 \\ \hline 1 - 2 = -1 \end{array}$$

Слѣдовательно новая дробь будетъ  $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$ ; помножь еще въ верху и въ низу на  $-1$  и получится числитель  $+\sqrt{2} + 1$ , а знаменатель  $+1$ ; но  $+\sqrt{2} + 1$  споль-

Н 5

кожѣ

кожѣ составляющѣ какѣ и  $\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ : ибо  $\sqrt{2}+1$  умноженное на дѣлителя  $1+\sqrt{2}$  какѣ:

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ \hline \end{array}$$

дастѣ  $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$

Также  $8-5\sqrt{2}$  раздѣленное на  $3-2\sqrt{2}$  дастѣ  $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ ; умножь въ верху и въ низу на  $3+2\sqrt{2}$  то получится числитель а знаменатель

$$\begin{array}{r} 8-5\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 24-15\sqrt{2} \\ +16\sqrt{2}-10.2 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=1 \end{array}$$

Слѣдовательно частное будетѣ  $4+\sqrt{2}$ ; а повѣрка дѣлается такѣ:

$$\begin{array}{r} 4+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12+3\sqrt{2} \\ - 8\sqrt{2}-2.2 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

Такимъ образомъ могутъ подобныя симъ дроби превращены быть въ другіе, въ коихъ знаменатели раціональные числа. Такъ дробь  $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$  когда въ верху и въ низу помножится на  $5-2\sqrt{6}$  превратится въ  $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$ . Также дробь  $\frac{2}{-1+\sqrt{-}}$  превратится въ  $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$ ; и  $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}-11+2\sqrt{30}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$

332.

Когда знаменатель состоятъ будетъ изъ многихъ членовъ, то подобнымъ сему образомъ исключаются изъ него неизвлекаемыя числа, какъ въ сей дроби  $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ; умножь сперва въ верху и въ низу на  $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ , то получится  $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$ , умножь еще въ верху и въ низу на  $5+2\sqrt{6}$  то произойдетъ  $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$ .



## ГЛАВА IX.

О кубахъ и извлеченіи кубичныхъ  
корней.

333.

Для сысканія куба корня  $a+b$  надлежитъ квадратъ его , которой есть  $aa + 2ab + bb$  , умножить еще на  $a+b$  , и выдешъ искомой кубъ даннаго корня, какъ:

$$\begin{array}{r}
 aa + 2ab + bb \\
 a + b \\
 \hline
 a^3 + 2aab + abb \\
 aab + 2abb + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3aab + 3abb + b^3
 \end{array}$$

Которой состоитъ изъ кубовъ обѣихъ частей корня , и еще изъ  $3aab + 3abb$  ; что столько значить какъ  $3ab \cdot (a+b)$  то есть: утроенное произведеніе обѣихъ частей на сумму ихъ помноженное.

334

И такъ когда корень состоитъ изъ двухъ частей, то по сему правилу кубъ его легко найдется. Напримѣръ: когда число  $5 = 3 + 2$ , то кубъ онаго будетъ  $= 27 + 8 + 18.5 = 125$ .

Пусть будетъ еще корень  $7 + 3 = 10$  то кубъ онаго  $= 343 + 27 + 63.10 = 1000$ ; что бы найти кубъ 36, то положи  $36 = 30 + 6$  и получится  $27000 + 216 + 19440 = 46656$ .

335

Если же обратно данъ будетъ кубъ  $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$  и должно будетъ сыскать его корень, то примѣчай слѣдующее:

Во первыхъ ежели кубъ по степени какой либо буквы надлежащимъ образомъ написанъ будетъ, то изъ самаго перваго члена  $a^3$  познается первой членъ корня  $a$ , котораго кубъ равенъ оному, и когда оной вычтется изъ даннаго куба, то останется  $3aab + 3abb + b^3$ , изъ чего надлежитъ сыскать второй членъ корня.

336.



Когда уже мы знаемъ, что сей второй членъ есть  $-b$ , то должно смотрѣть только, какимъ бы образомъ его изъ вышепомянутаго остатка найти можно было. Оной остатокъ можно изъяснить въ двухъ множителяхъ, такъ  $(3a^2 + 3ab + b^2) b$ , слѣдовательно когда остатокъ раздѣлится на  $3a^2 + 3ab + b^2$ , то получится искомой второй членъ корня  $b$ .

Но когда второй членъ корня еще намъ не извѣстенъ, то и дѣлитель будемъ также не вѣдомъ; однако довольно того, что мы первую часть сего дѣлителя имѣемъ, то есть  $3aa$ , или упрощенной квадратъ первой уже найденной части корня, изъ которой можно уже найти и вторую часть онаго  $b$ , коимъ потомъ дѣлитель помноженъ быть долженъ прежде нежели дѣленіе совершится, и для того надлежитъ къ  $3aa$  прибавить еще  $3ab$ , то есть тройное про-

произведеніе первой части на вторую ,  
и наконецъ  $bb$  , какъ квадратъ второй  
части корня.

338.

Пусть будетъ данъ примѣръ  
такой кубъ :

$$\begin{array}{r} a^3 + 12aa + 48a + 64 \left\{ \begin{array}{l} a + 4 \\ a^3 \end{array} \right. \\ \hline 3aa + 12a + 16 \left\{ \begin{array}{l} 12aa + 48a + 64 \\ 12aa + 48a + 64 \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Пусть будетъ еще данъ кубъ :

$$\begin{array}{r} a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \left\{ \begin{array}{l} aa - 2a \\ a^6 \end{array} \right. \\ \hline 3a^4 - 6a^3 + 4aa \left\{ \begin{array}{l} -6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\ -6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \end{array} \right. \\ \hline 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 \left\{ \begin{array}{l} 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\ -6a + 1 \end{array} \right. \\ \hline 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \left\{ \begin{array}{l} 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\ -6a + 1 \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

339.

На семъ основано общее правило  
находить кубичные корни въ числахъ.  
Какъ

## 224 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

Какъ изъ числа 2197 извлекается онъ такъ.

$$\begin{array}{r} 2197 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2197 \\ 1000 \end{array}} \right\} 10 + 3 = 13 \\ 1000 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2197 \\ 1000 \end{array}} \right\} \\ \hline 300 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 300 \\ 99 \end{array}} \right\} 1197 \\ 99 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 300 \\ 99 \end{array}} \right\} 1197 \\ \hline 399 \end{array}$$

Пусть будетъ дано еще кубическое число 46656, изъ котораго надлежитъ найти кубичной корень.

$$\begin{array}{r} 46656 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 46656 \\ 27000 \end{array}} \right\} 30 + 6 \\ 27000 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 46656 \\ 27000 \end{array}} \right\} \\ \hline 2700 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2700 \\ 540 \end{array}} \right\} 19656 \\ 540 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2700 \\ 540 \end{array}} \right\} 19656 \\ 36 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2700 \\ 540 \end{array}} \right\} 19656 \\ \hline 3276 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2700 \\ 540 \end{array}} \right\} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 | 625 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 15 | 625 \\ 8 | 00 \end{array}} \right\} 20 + 5 \\ 8 | 00 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 15 | 625 \\ 8 | 00 \end{array}} \right\} \\ \hline 1200 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1200 \\ 300 \end{array}} \right\} 7625 \\ 300 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1200 \\ 300 \end{array}} \right\} 7625 \\ 25 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1200 \\ 300 \end{array}} \right\} 7625 \\ \hline 1525 \end{array}$$



## ГЛАВА X.

О степеняхъ составныхъ чиселъ.

340.

Послѣ квадратовъ и кубовъ слѣдующіе вышіе степени, которые сперва чрезъ

чрезъ показателей , какъ уже выше показано извѣявляется , включая только данной корень, естли онъ не изъ одного знака состоитъ , въ скобки; такъ  $(a+b)^5$  значитъ пятую степень  $a+b$  ,  $(a-b)^6$  шестую степень изъ  $a-b$  ; а какимъ образомъ сїи степени рѣшаются , то показано будетъ въ сей главѣ.

341.

Пусть будетъ  $a+b$  корень или первая степень , то выше степени онаго найдутся по умноженію слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r}
 a+b \\
 a+b \\
 \hline
 (a+b)^2 = aa + 2ab + bb \\
 \quad a+b \\
 \hline
 \quad a^3 + 2aab + abb \\
 \quad \quad aab + 2abb + b^2 \\
 \hline
 (a+b)^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
 \quad a+b \\
 \hline
 \quad a^4 + 3a^3b + 2a^2bb + ab^3 \\
 \quad \quad a^3b + 3a^2bb + 3ab^3 + b^4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 \qquad \qquad (a+b)^4
 \end{array}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2bb + 4ab^3 + b^4$$


---


$$a + b$$

$$a^5 + 4a^4b + 6a^3bb + 4a^2b^3 + ab^4$$

$$a^4b + 4a^3bb + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$


---

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$


---


$$a + b$$

$$a^6 + 5a^5b + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + 5a^2b^4$$

$$+ ab^5$$

$$a^5b + 5a^4b^2 + 10a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5ab^5$$

$$+ b^6$$


---

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4$$

$$+ 6ab^5 + b^6$$


---


$$a + b$$

$$a^7 + 6a^6b + 15a^5b^2 + 20a^4b^3 + 15a^3b^4$$

$$+ 6a^2b^5 + ab^6$$

$$+ a^6b + 6a^5b^2 + 15a^4b^3 + 20a^3b^4$$

$$+ 15a^2b^5 + 6ab^6 + b^7$$


---

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4$$

$$+ 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$


---

342.

Такимъ же точно образомъ находящ-  
ся степени корня  $a-b$ , съ тою только  
раз-

разностию что 2 рой 4 той 6 той и  
пропущены будучи имѣть знакъ отри-  
цательной , какъ изъ слѣдующаго при-  
мѣра явствуетъ:

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+bb \end{array}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + bb$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^3-2aab+abb \\ -aab+2abb-b^2 \end{array}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^4-3a^3b+3aabb-ab^2 \\ -a^3b+3aabb-3ab^2+b^3 \end{array}$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^5-4a^4b+6a^3bb-4a^2b^3+ab^4 \\ -a^4b+4a^3bb-6a^2b^3+4ab^4-b^5 \end{array}$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$$


---

$$\begin{aligned} & a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5a^2b^4 - ab^5 \\ & - a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10a^2b^4 - 5ab^5 \\ & + b^6 \end{aligned}$$


---

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

343.

Здѣсь спрашивается какимъ бы образомъ безъ сего дѣйствительнаго счисленія всѣ степени изъ  $a+b$  и  $a-b$  найти можно было? при чемъ между прочимъ примѣчать надлежитъ, что когда кто въ состояніи сыскать всѣ степени изъ  $a+b$ , то изъ того всѣ степени изъ  $a-b$  сами найдутся, еслии только знаки четныхъ членовъ, а именно 2 го, 4 го, 6 го, 8 го и проч, переменятся; слѣдовательно здѣсь надобно только сыскать правило, по которому бы каждую степень изъ  $a+b$ , какъ бы она велика ни была, найти можно было, не имѣя нужды вычислять всѣ предвидущіе степени.

344.

344.

Когда въ найденныхъ выше сего степеняхъ числа при каждомъ членѣ находящіяся и называемыя *коэффициенты*, прочь опбросятъ, то въ членахъ окажется изрядной порядокъ. На самомъ первомъ мѣстѣ стойтъ искомая степень изъ  $a$  и во всѣхъ слѣдующихъ членахъ степень изъ  $a$  всегда единицею унижается, на противъ того степени изъ  $b$  всегда единицею возвышаются, такъ что сумма указателей изъ  $a$  и  $b$  равна во всѣхъ членахъ. Такъ когда требуется 10 тая степень изъ  $a+b$ , то члены безъ коэффициентовъ идутъ такимъ порядкомъ:  $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}$ .

345.

И такъ надлежитъ только показать, какимъ образомъ надлежащіе къ тѣмъ членамъ коэффициенты находить должно, или на какіе числа каждой членъ помноженъ быть долженствуетъ. Что касается до перваго члена, то коэффи-

О 3

циентъ



цѣнствъ его всегда равенъ единицѣ , а  
 въпораго равенъ всегда показателю самой  
 той степени , которая ищется; въ слѣ-  
 дующихъ членахъ на противъ того не  
 такъ легко примѣнить можно порядокъ,  
 коимъ они идутъ , между тѣмъ когда  
 сіи коэффициенты мало по малу про-  
 должать станешь далѣе , то наконецъ  
 можно будетъ ихъ легко продолжать  
 такъ далеко, какъ кто пожелаетъ: что  
 изъ слѣдующей таблицы видно.

Степ.

|       |   |   |          |                                                |
|-------|---|---|----------|------------------------------------------------|
| I.    | - | - | коэффиц. | 1, 1                                           |
| II.   | - | - | -        | 1, 2, 1                                        |
| III.  | - | - | -        | 1, 3, 3, 1                                     |
| IV.   | - | - | -        | 1, 4, 6, 4, 1                                  |
| V.    | - | - | -        | 1, 5, 10, 10, 5, 1,                            |
| VI.   | - | - | -        | 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1,                        |
| VII.  | - | - | -        | 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1,                    |
| VIII. | - | - | -        | 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,                |
| IX.   | - | - | -        | 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1           |
| X.    | - | - | -        | 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. |

Такимъ образомъ десятая степень  
 изъ  $a+b$  будетъ.

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346.

При сихъ коэффициентахъ примѣ-  
нять надлежитъ, что сумма ихъ въ ка-  
ждой степени должна произвестъ почную  
степень  $2^x$ : ибо положи  $a=1$ ,  $b=1$  каж-  
дой членъ, исключая коэффициенты, ра-  
венъ будетъ 1 такъ что однихъ толь-  
ко коэффициентовъ должно складывать  
вмѣстѣ; по чему 10 тая степень  $(1+1)^{10}$   
 $=2^{10}=1024$ . Тоже самое разумѣется и  
о всѣхъ прочихъ степеняхъ, такъ

для первой степени будетъ  $1+1=2$

для второй  $1+2+1=4=2^2$

— третьей  $1+3+3+1=8=2^3$

— четвертой  $1+4+6+4+1=16$   
 $=2^4$

5 той  $1+5+10+10+5+1$   
 $=32=2^5$

6 той  $1+6+15+20+15+6$   
 $+1=64=2^6$

7 мой  $1+7+21+35+35+21$   
 $+7+1=128=2^7$  и прот.

## 347.

Въ разсужденіи сихъ коэффициентовъ еще примѣчать надлежитъ, что они отъ начала до середины расшутъ, а потомъ шѣмъ же порядкомъ уменьшаются. Въ четныхъ степеняхъ самой большей коэффициентъ стоитъ въ срединѣ, а въ нечетныхъ два средніе самые большіе и между собою равные.

Самой порядокъ коэффициентовъ надлежитъ обстоятельнѣе разсмотрѣть, дабы ихъ для каждой степени находить можно было, не имѣя нужды въ предъидущихъ. На сей конецъ предложимъ здѣсь правило, коего доказательство оставляемъ до слѣдующей главы.

## 348.

Для сысканія коэффициентовъ какой ни будь данной степени, на прим. 7 мой, напиши по порядку слѣдующіе дроби

$$\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7},$$

гдѣ числители начинаются съ показателя требуемой степени, а знаменатели идуть по порядку чиселъ какъ:

1, 2, 3, 4 и проч. поелику первой коэффициентъ всегда равенъ 1, то первая дробь даетъ второго коэффициента, первые двѣ дроби помноженные между собою даютъ третьяго, три первые умноженные между собою 4 шаго. и такъ далѣе.

Слѣдовательно первой коэфф. будетъ  $= 1$ , 2 рой  $\frac{7}{1} = 7$ , 3 шей  $= \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ ; 4 той  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ ; 5 шой  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ , 6 шой  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$ , 7 мой  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7$ , 8 мой  $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ .

349.

Слѣдовательно для второй степени будутъ сѣи дроби  $\frac{2}{1}$ ,  $\frac{1}{2}$ , почему первой коэфф.  $= 1$ , второй  $= \frac{2}{1} = 2$ , третьей  $= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ .

Для третьей степени будутъ слѣдующіе дроби  $\frac{3}{1}$ ,  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  и потому первой коэфф.  $= 1$ , второй  $= \frac{3}{1} = 3$ , 3 шей  $= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ , 4 той  $= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$ .

Для четвертой степени будутъ сѣи дроби  $\frac{4}{1}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ : первой коэфф.  $= 1$ , 2 рой  $= \frac{4}{1} = 4$ , 3 шей  $= 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ , 4 той  $= 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ , 5 шой  $= 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ .

О 5

350.

## 350.

Сіе правило подастъ намъ ту способность, что предвидущихъ коэффициентовъ знать не требуется, но для каждой степени надлежащіе коэффициенты потчасъ найти можно. Такъ для 10той степени пишутся сіи дроби  $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$  отсюда получится 1вой коэфф. = 1, 2рой =  $\frac{10}{1} = 10$ , 3тей =  $10 \cdot \frac{9}{2} = 45$ , 4той =  $45 \cdot \frac{8}{3} = 120$ , 5той =  $120 \cdot \frac{7}{4} = 210$ , 6той =  $210 \cdot \frac{6}{5} = 252$ , 7мой =  $252 \cdot \frac{5}{6} = 210$ , 8мой =  $210 \cdot \frac{4}{7} = 120$ , 9шой =  $120 \cdot \frac{3}{8} = 45$ , 10шой =  $45 \cdot \frac{2}{9} = 10$ , 11шой =  $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$ .

## 351.

Сіи дроби можно также просто выписывать каковы они есть, не искавъ ихъ точнаго знаменовація, и такимъ образомъ не трудно будетъ написать каждую степень изъ  $(a + b)$  какъ бы она велика ни была. Такъ 100шая степень изъ  $(a + b) = (a + b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100}{1}.$

$$\frac{99}{2}a^{98}b^2 + \frac{100.99.98}{1. 2. 3.}a^{97}b^3 + \frac{100. 99. 98. 97}{1. 2. 3. 4.}a^{96}b^4 + \frac{100. 99.}{1. 2.}$$

$$\frac{98. 97. 96}{3. 4. 5.}a^{95}b^5 + \frac{100. 99. 98. 97. 96. 95}{1. 2. 3. 4. 5. 6.}a^{94}b^6, \text{ и такъ да-}$$

лѣе ; изъ чего порядокъ слѣдующихъ членовъ каждой видѣшь можешь.



## ГЛАВА XI.

О переложении буквъ, на чемъ доказательство прежде даннаго правила основано.

352.

Еслили кто разсматривать станетъ произхожденіе помянутыхъ коэффициентовъ, тошъ примѣишь , что каждой членъ столько разъ тамъ находится , сколько разъ буквы , изъ которыхъ оной состоишь переложить можно ; какъ во второй степени членъ  $ab$  находится два раза , пошому что можно написать  $ab$  и  $ba$  , напрошивъ того  $aa$  только однажды , для того что въ порядкѣ буквъ нѣтъ никакой перемѣны. При 3тей степени членъ  $aab$  можетъ написанъ бытъ прѣмъ  
обратъ

образами какъ  $aab$  ,  $aba$  ,  $baa$  , и для того коэффициентъ его также 3 : равнымъ образомъ въ четвертой степени членъ  $a^4b$  можетъ переложенъ быть четырьмя образами , какъ  $aaab$  ,  $aaba$  ,  $abaa$  ,  $baaa$  , и для того коэффициентъ его есть 4 , членъ же  $aabb$  имѣетъ коэффициента 6 , для того что членъ  $aabb$  шесть разъ переложить можно какъ  $aabb$  ,  $abba$  ,  $bbaa$  ,  $baab$  ,  $abab$  ,  $baab$  , то же самое наблюдать надлежитъ , при всѣхъ прочихъ членахъ степени.

## 353.

Усмотря въ самомъ дѣлѣ, что наприм. 4 тая степень каждаго корня, хотя онъ больше нежели изъ двухъ частей состоитъ, какъ  $(a+b+c+d)$  найдется , когда слѣдующіе 4 множителя между собою помножатся I.  $a+b+c+d$  , II.  $a+b+c+d$  , III.  $a+b+c+d$  , IV.  $a+b+c+d$  . Здѣсь надлежитъ каждую букву перваго множителя каждою втораго , каждою третьяго , и каждою четвертаго помножить , по чему каждой членъ долженъ со-

состоять изъ 4 хъ буквъ, и такое имѣть при себѣ число, сколько разъ онаго буквы переставить можно, то есть симъ образомъ коэффициенты его опредѣлился.

## 354

Здѣсь главное дѣло состоятъ въ томъ, сколько разъ какое ни будь число буквъ переложить можно, при чемъ особливо смотрѣть надлежитъ, будутъ ли оныя буквы одинаки или нѣтъ; ибо когда они всѣ одинаки, то и перекладывать ихъ не лзя, по которой причинѣ простые степени, какъ  $a^2, a^3, a^4$  всѣ 1 коэфф. имѣютъ.

## 355.

Возмемъ теперь разные буквы начавъ съ двухъ, какъ то  $ab$ , гдѣ двѣ только переменны имѣютъ мѣсто, а именно  $ab$ ,  $ba$ .

Когда же будутъ три буквы разные какъ  $abc$ , то видно, что каждая изъ нихъ первое мѣсто имѣть можетъ, а двѣ прочіе два раза переложить можно;  
слѣд.



## 238 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

слѣд. когда *a* стоитъ напередѣ , тогда будутъ двѣ переставки *abc* , *acb* ; и столько же переставокъ будетъ когда *b* , на первомъ мѣстѣ положится , какъ *bac* , *bca* ; и на послѣдокъ положивъ *c* въ начала *c* получаются послѣдніе двѣ переставки какъ *cab* , *cba* ; и такъ всѣхъ переложеній трехъ буквъ сумма будетъ  $3.2=6$ .

Когда же будутъ 4 буквы *abcd* , тогда каждая можетъ стоять на первомъ мѣстѣ , и въ каждой разѣ 3 прочіе буквы дадутъ 6 перемѣнъ , слѣдовательно число всѣхъ переложеній будетъ  $4.6=24=1.2.3.4$  или  $4.3.2.1$ .

А ежели дано будетъ 5 буквъ *abcde* , по равнымъ образомъ какъ и прежде каждая изъ нихъ первое мѣсто занимать можетъ , и въ каждомъ случаѣ прочіе 4 могутъ переложены быть 24 раза , чего ради число всѣхъ переложеній будетъ  $5.24=120=5.4.3.2.1$ .

356.

Какъ бы велико число буквъ ни было , только еслии всѣ они не одина-

ки

ки, число всѣхъ переложений весьма легко опредѣлить можно, какъ изъ слѣдующей таблицы явствуетъ:

чис. бук.

|       |   |                   |                                                                                        |
|-------|---|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| I.    | - | число переложений | $1 = 1$                                                                                |
| II.   | - | - - - - -         | $2 \cdot 1 = 2$                                                                        |
| III.  | - | - - -             | $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$                                                                |
| IV.   | - | - - - -           | $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$                                                       |
| V.    | - | - - - -           | $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$                                              |
| VI.   | - | - - - - -         | $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$                                      |
| VII.  | - | - - - - -         | $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$                             |
| VIII. | - | - - - - -         | $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$                    |
| IX.   | - | - - - - -         | $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$           |
| X.    | - | - - - - -         | $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$ |

357.

Но надлежитъ примѣчать, что найденныя числа тогда только справедливы, когда данныя буквы не одинаки. Ибо когда 2 или больше изъ нихъ будутъ одинаки, то число переложений гораздо уменьшится; а если они всѣ будутъ одинаки, то и перемѣны никакой не имѣется. Посмотримъ какъ по числу

240 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ  
числу такихъ одинакихъ буквъ уменьшаю-  
тся помянутыя числа переложеній.

358.

Ежели будутъ двѣ буквы одинаки,  
то двѣ перемѣны за одну щипать дол-  
жно, и для того выше найденное число  
въ половину уменьшится, или на 2 раз-  
дѣлится. Когда же 3 буквы одинаки,  
то 6 переложеній щипаются за одну,  
и для того помянутое число на  $6 = 3 \cdot 2$   
раздѣлится. Равнымъ образомъ  
если будутъ 4 буквы одинакіе, то  
прежнее число переложеній раздѣлится  
должно на  $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , и такъ далѣе.

По сему опредѣлить можно, сколь-  
ко разъ буквы *aaabbc* переложить можно.  
Число ихъ всѣхъ есть 6, и если бы  
они всѣ были разные, то бы число пере-  
мѣнъ было  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ; но поелику въ  
немъ *a* находится 3 раза, то раздѣлить  
его должно на  $3 \cdot 2 \cdot 1$ , и при томъ *b* так-  
же 2 раза попадаетъ, то оное же чи-  
сло раздѣлить надобно еще на  $2 \cdot 1$  слѣд.  
число переложеній будетъ  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ .

359.

359.

Отсюда можемъ мы коэффициенты  
каждаго члена , и для каждой степени ,  
опредѣлить безъ труда , что мы напр.  
для 7 мой степени  $(a+b)^7$  покажемъ. Здѣсь  
первой членъ есть  $a^7$ , которой только на  
1 помноженъ, и когда во всѣхъ прочихъ  
членахъ 7 буквъ находится , то чи-  
сло всѣхъ переложений было бы 7.6.5.4.  
3.2.1, естли бы они всѣ были разные ;  
но понеже во второмъ членѣ  $a^6b$  6 оди-  
накихъ буквъ находится , то оное число  
должно раздѣлить на 6.5.4.3.2.1 откуда  
произойдетъ коэффициентъ его  $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$   
 $= 7$ .

Въ третьемъ членѣ  $a^5b^2$   $a$  находится  
5 разъ  $b$  два раза , для того оное чи-  
сло должно раздѣлить , на 5.4.3.2.1 и  
еще на 2.1; по чему искомой коэффиці-  
ентъ будетъ  $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$ .

Въ четвертомъ членѣ  $a^4b^3$   $a$  находит-  
ся 4 раза , а  $b$  3 раза , и такъ помяну-  
тое число раздѣлить должно на 4.3.2.1,

П

и

## 242 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

и на 3.2.1, отсюда искомой коэффициентъ 
$$\frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.3.2.1} = \frac{7.6.5}{1.2.3}.$$

Равнымъ образомъ 5 шаго члена  $a^3b^4$  коэффициентъ 
$$\frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.4.3.2.1} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$$
 и такъ далѣе; и симъ вышепоказанное правило доказывается.

360.

Сіи разсужденія ведутъ насъ еще далѣе и показываютъ какимъ образомъ надлежитъ находить всѣ степени и такихъ корней, которые больше нежели изъ двухъ частей состоятъ. Сіе изъяснимъ мы прѣшнюю степень  $(a+b+c)^3$ , гдѣ всѣ возможныя переложенія трехъ буквъ, такъ какъ члены находятся должны, и каждой членъ коэффициентовъ своихъ имѣть будетъ: слѣдовательно прѣшья искомая степень есть  $a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3$ . Положимъ  $a=1, b=1, c=1$  и будетъ кубъ  $1+1+1$ , то есть,  $3=1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27$ ; еслили же по-

ложится



362.

Естьли бы мы захотѣли имѣть такую же степень корня  $a-b$ , то надлежало бы шолько · перемѣнить знаки 2 го, 4 шаго, 6 го, 8 го и проч: членовъ въ противные, откуда получится.

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5.$$

363.

Сии формулы служатъ намъ для извѣявленія всякихъ родовъ корней: ибо когда уже мы показали какимъ образомъ корни въ ломаныхъ показателяхъ извѣявиться могутъ, какъ  $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$

и такъ далѣе, то будетъ также  $\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ ,  $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$  и такъ далѣе. Слѣдовательно чтобы найти квадратной корень изъ  $(a+b)$  поставь въ первой общей формулѣ мѣсто показателя  $n$ ,  $\frac{1}{2}$ , откуда коэффициенты произойдутъ такіе:

$$\frac{n-1}{2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

$\frac{n-1}{1-2}$ ,  $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$ ,  $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{8}$ ,  $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$ ,  $\frac{n-4}{5}$   
 $= -\frac{7}{10}$ ,  $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$ , а попомъ  $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ; и  $a^{n-1}$   
 $= \frac{1}{\sqrt{a}}$ ,  $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ ,  $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$  и проч. Сии степе-  
 ни числа  $a$  можно изобразить и такъ  
 $a^n = \sqrt{a}$ ,  $a^{n-1} = \frac{a^n}{a} = \frac{\sqrt{a}}{a}$ ,  $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{aa}$ ,  $a^{n-3}$   
 $= \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$ ,  $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$  и такъ далѣе.

364.

По сему квадратной корень изъ  $(a+b)$  изобразится такъ.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2 \cdot 4}b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ и проч.}$$

365.

Ежели  $a$  будетъ квадратное число, то  $\sqrt{a}$  опредѣлить можно, а квадратной корень изъ  $(a+b)$  безъ кореннаго знака безконечнымъ рядомъ чиселъ изъ-явившися можетъ.

Такъ когда  $a = cc$  то  $\sqrt{a} = c$  и будетъ  
 $\sqrt{c^2+b} = c + \frac{1}{2}\frac{b}{c} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{c^7}$  и проч.

П 3

Симъ



Симъ образомъ изъ каждого числа можно извлекать квадратной корень, потому что каждое число раздѣлить можно на двѣ части изъ одной будетъ квадратъ, которой здѣсь изъвѣствуетъ  $cc$ . Если должно будетъ наприм: извлечь квадратной корень изъ 6, то положи  $b=4+2$ , и тогда будетъ  $cc=4$ ,  $b=2$ , того ради  $\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1324}$  и проч. и когда изъ сего ряда возмущся только два первые члена, то произойдетъ  $2\frac{1}{2}=2\frac{5}{2}$ ; коего квадратъ  $2\frac{25}{4}$  тью только больше нежели 6; взявъ при первые члена получится  $2\frac{7}{16}=2\frac{39}{16}$ . коего квадратъ  $2\frac{1521}{256}$ ,  $2\frac{15}{256}$  меньше нежели 6.

366.

Когда въ томъ же примѣрѣ  $\frac{5}{2}$  уже весьма близко къ правдѣ подходитъ, то можно положить

$b=2\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$ ; по чему  $cc=2\frac{25}{4}$ ,  $c=2\frac{5}{2}$ ,  $b=-\frac{1}{4}$ , по которымъ вычисля два первые члена выдетъ  $\sqrt{6}=2\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=2\frac{5}{2}-\frac{1}{8}=2\frac{5}{2}-\frac{1}{8}=2\frac{5}{2}-\frac{1}{8}=2\frac{5}{2}-\frac{1}{8}$

$=49$   
 $=22$

$= \frac{49}{20}$ , котораго числа квадратъ  $\frac{2401}{400}$  только  $\frac{1}{400}$  пою частью больше нежели 6.

Положимъ теперь  $b = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$ , то будетъ  $c = \frac{49}{20}$  и  $b = -\frac{1}{400}$ , откуда взявъ паки только два первые члена будетъ  $\sqrt[3]{b} = \frac{49}{20}$

$+ \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{400} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2 \cdot 400} = \frac{49}{20} - \frac{1}{800} = \frac{4801}{1920}$ , коего квадратъ  $= \frac{23049601}{3681600}$ ; а понеже  $b = \frac{23049600}{3681600}$ , то погрѣшность будетъ не болѣе какъ  $\frac{1}{3681600}$  часть.

367.

Равнымъ образомъ изобразить можно и кубичной корень безконечнымъ рядомъ: ибо когда  $\sqrt[3]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ , то въ общей нашей формулѣ будетъ  $n = \frac{1}{3}$ ; чего ради коэффициенты будутъ слѣдующіе:  $\frac{n-1}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$ ,  $\frac{n-2}{2-\frac{1}{3}} = -\frac{5}{9}$ ,  $\frac{n-3}{3-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{n-4}{4-\frac{1}{3}} = -\frac{11}{15}$  и проч.; а для степени изъ  $a$ ,  $a^n = \sqrt[3]{a}$ ,  $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ ,  $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$ ,  $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$  и проч. откуда получится

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(a+b)} &= \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3} \frac{b \sqrt[3]{a}}{a} - \frac{5}{9} \frac{bb \sqrt[3]{a}}{a^2} + \frac{11}{15} \frac{b^3 \sqrt[3]{a}}{a^3} \\ &- \frac{10}{243} \frac{b^4 \sqrt[3]{a}}{a^4} \text{ и проч.} \end{aligned}$$

П 4

368.

368.

И такъ ежели  $a$  будетъ кубъ, то есть  $a = c^3$ , то  $\sqrt[3]{a} = c$ , и для сей причины пропадутъ всѣ коренные знаки, и выйдетъ  $\sqrt[3]{c^3 + b} = c + \frac{1}{3} \frac{b}{c^2} - \frac{1}{9} \frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81} \frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243} \frac{b^4}{c^{11}}$  и проч.

369.

Помощію сей формулы можно теперь изъ всякаго числа извлекать корень кубичной чрезъ приближеніе, пошому что каждае число можетъ раздѣлиться на двѣ части, какъ  $c^3 + b$ , изъ коихъ первая есть кубъ.

Такъ когда надобно будетъ найти кубичной корень двухъ, то положи  $2 = 1 + 1$ , и будетъ  $c = 1$ ,  $b = 1$ , слѣдовательно

$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{7}{9} + \frac{5}{81}$  и проч. изъ коихъ первые два члена дающъ  $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ , коего кубъ  $\frac{64}{27}$  превосходитъ  $\frac{10}{27}$  ми частями число 2, и для того положи  $1 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$  то есть,  $c = \frac{4}{3}$  и  $b = -\frac{10}{27}$  того ради

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}} \text{ и прочая. Сии}$$

два члена  $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$ , коего кубъ

$= \frac{753571}{393248}$ , но понеже  $2 = \frac{786496}{393248}$ , слѣдователь-  
но погрѣшность  $= \frac{7175}{373248}$  частямъ, и та-  
кимъ образомъ можно есѣли кто похочетъ  
подходить къ точному корню часъ отъ  
часу ближе, особливо когда возмешся  
больше членовъ.



### ГЛАВА XIII.

О разрѣшеніи отрицательныхъ степеней.

370.

Въше сего показано было, что  $\frac{1}{a}$  мо-  
жетъ изъясниться чрезъ  $a^{-1}$ , и для того  
также  $\frac{1}{a+b}$  чрезъ  $(a+b)^{-1}$ , такъ что  
дробь  $\frac{1}{a+b}$  почесъся можетъ за степень  
изъ  $a+b$ , кошорой показатель есть  $-1$ ,

П 5

почему

почему вышеснайденной рядъ для  $(a+b)^n$  заключаеиъ въ себѣ и сей случай.

371.

Когда  $\frac{1}{a+b}$  то же что и  $(a+b)^{-1}$ , то положи въ прежней формулѣ  $n = -1$  коэффициенты будутъ  $\frac{n}{1} = -1$ ,  $\frac{n-1}{2} = -1$ ,  $\frac{n-2}{3} = -1$ ,  $\frac{n-3}{4} = -1$ ,  $\frac{n-4}{5} = -1$ , и пошомъ для степени числа  $a$ ,  $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$ ,  $a^{n-1} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ;  $a^{n-2} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ ;  $a^{n-3} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$  и такъ далѣе, чего ради получимъ мы  $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$  и пр. что даеиъ намъ самой тоиъ же рядъ, кой выше сего найденъ былъ по дѣленію.

372.

Когда  $\frac{1}{(a+b)^2}$  то же, что и  $(a+b)^{-2}$ , то можно также разрѣшивъ и сію формулу въ безконечной рядъ.

Положи сперва  $n = -2$  коэффициенты будутъ  $\frac{n}{1} = -2$ ,  $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$ ,  $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$ ,  $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$  и проч.; а степени изъ  $a$ ,  $a^n = \frac{1}{a^2}$

$a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$ ,  $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$ ,  $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ ,  $a^{n-4} = \frac{1}{a^6}$ ,  
и проч. откуда произойдешъ

$$(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1 \cdot a^3} + \frac{2}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^4} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^4}{a^6} \text{ и проч.}; \text{ но } \frac{2}{1} = 2, \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3, \\ \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4, \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \text{ и проч. будетъ} \\ \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2 \frac{b}{a^3} + 3 \frac{b^2}{a^4} - 4 \frac{b^3}{a^5} + 5 \frac{b^4}{a^6} - 6 \frac{b^5}{a^7} + 7 \frac{b^6}{a^8} \\ \text{и проч.}$$

373.

Еслили мы еще положимъ  $n = -3$ ,  
то получимъ рядъ мѣсто  $(a+b)^{-2}$  по  
есть, мѣсто  $\frac{1}{(a+b)^3}$ , въ которомъ коэффи-  
циенты будутъ  $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$ ,  $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$ ,  $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$ ,  
 $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ , и прочая; а степени изъ чи-  
сла  $a$  будетъ  $a^n = \frac{1}{a^3}$ ,  $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$ ,  $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ ,  
 $a^{n-3} = \frac{1}{a^6}$ ,  $a^{n-4} = \frac{1}{a^7}$  и проч. изъ сего по-  
лучимъ мы  $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1} \frac{b}{a^4} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^5} - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^6}$  и  
проч.  $= \frac{1}{a^3} - 3 \frac{b}{a^4} + 6 \frac{b^2}{a^5} - 10 \frac{b^3}{a^6} + 15 \frac{b^4}{a^7} - 21 \frac{b^5}{a^8}$   
и проч. положивъ еще  $n = -4$ ,  
коэффициенты будутъ  $\frac{n}{1} = -4$ ,  $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$ ,  
 $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$ ,  $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$  и проч. Степени же  
изъ

изъ  $a$ ,  $a^n = \frac{1}{a^4}$ ,  $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$ ,  $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$  и проч.

откуда найдется  $(\frac{1}{a+b})^4 = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1} \frac{b}{a^5} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^7} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^4}{a^8} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{b^5}{a^9}$  и проч.  $= \frac{1}{a^4} - 4 \frac{b}{a^5} + 10 \frac{b^2}{a^6} - 20 \frac{b^3}{a^7} + 35 \frac{b^4}{a^8} - 56 \frac{b^5}{a^9} + 84 \frac{b^6}{a^{10}}$  и проч.

## 374.

Отсюда смѣло заключить мы можемъ, что каждая такая отрицательная степень вообще будетъ

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1} \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \frac{(m+2)}{3} \frac{b^3}{a^{m+3}} + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{b^4}{a^{m+4}} \text{ и проч.}$$

изъ которой формулы всѣ сѣи дроби въ безконечной рядъ обратятся; здѣсь мѣсто  $m$  можно брать также и дроби, чтобы изобразить неизвлекаемыя Формулы.

## 375.

Къ большей ясности присовокупимъ еще сѣе: когда мы нашли что  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$

$+ \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}$  и такъ безконечно, то помножимъ

множимъ сей рядъ на  $a+b$ , ибо тогда въ произведеніи должно выйти 1 умноженіе сіе дѣлается такъ:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ и проч.}$$


---


$$a+b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$


---

произведеніе  $= 1$ , какъ непременно слѣдовашь должно.

376.

Мы еще нашли что  $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ и проч.}$ , то есть ли сей рядъ умножится на  $(a+b)^2$ , въ произведеніи должна также выйти единица; и поелику  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , то умноженіе здѣлается такъ:

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ и проч.}$$


---


$$aa + 2ab + bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$

$$+ \frac{2b}{a}$$



## 254 О РАЗНЫХЪ РОДАХЪ ИЗЧИСЛЕНІЯ

$$+\frac{2b}{a}-\frac{4b^2}{a^2}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{10b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$

$$+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$


---

Произведеніе 1, какъ самое свойство вещи требуетъ.

377.

Ежели бы мѣсто  $\frac{1}{(a+b)^2}$  найденной рядъ должно было помножить только на  $a+b$ , то надлежало бы выйти въ произведеніи  $\frac{1}{a+b}$  или найденному прежде ряду мѣсто сей дроби  $\frac{a}{1}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$  и проч. что также подтверждаетъ слѣдующее умноженіе

$$\frac{\frac{1}{aa}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}}{a+b}$$


---

$$\frac{1}{a}-2\frac{b}{a^2}+3\frac{b^2}{a^3}-4\frac{b^3}{a^4}+5\frac{b^4}{a^5}-6\frac{b^5}{a^6} \text{ и проч.}$$

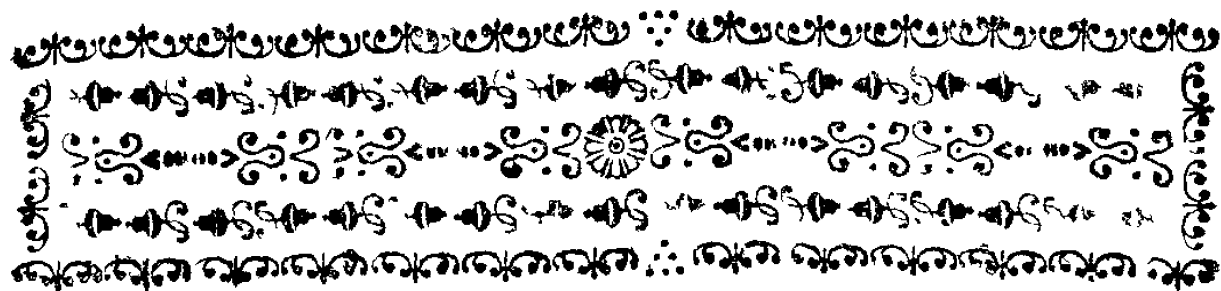
$$+\frac{b}{a^2}-2\frac{b^2}{a^3}+3\frac{b^3}{a^4}-4\frac{b^4}{a^5}+5\frac{b^5}{a^6} \text{ и проч.}$$


---

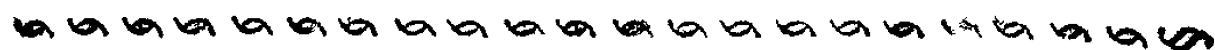
$$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6} \text{ и проч.}$$

Конецъ второй части, о разныхъ изчисленія способахъ соснавыхъ количествъ.

ЧАСТЬ



## ЧАСТЬ ТРЕТІЯ, о содержаніи и пропорціи.



### ГЛАВА I.

О содержаніи ариѣметическомъ или раз-  
носіяхъ двухъ чиселъ.

378.

**Д**ва количества бывають между собою  
равны или не равны. Въ послѣднемъ  
случаѣ одно количество будетъ больше,  
а другое меньше; о неравенствѣ ихъ  
спрашивать можно двоякимъ образомъ:  
иногда спрашивается, чѣмъ одно число  
больше другаго? а иногда во сколько  
разъ одно больше другаго? оба сѣи опре-  
дѣленія содержангемъ называются, пер-  
вое

вое называется *арифметическимъ* содержаніемъ, а другое *геометрическимъ*. Наименованія сіи не имѣютъ никакого сообщества съ самою вещью, но введены только по одному произволению.

## 379.

Здѣсь само чрезъ себя разумѣется, что количества, которыя между собою сносятся, должны быть одинакаго рода, впрочемъ не можно бы было ничего сказать о ихъ равенствѣ или неравенствѣ. Весьма бы чудно было, еспли бы кто спросилъ наприм. 2 фунта и 3 локтя равны ли или не равны между собою? По сей причинѣ здѣсь говорится вездѣ о величинахъ одного рода, и поелику ихъ числами означать можно, то какъ уже и прежде упомянуто было, разсуждается здѣсь объ однихъ только числахъ.

## 380.

Когда будетъ спрашиваться о двухъ числахъ, чѣмъ одно изъ нихъ больше другого, то чрезъ сей вопросъ опредѣ-  
лился

лился арифметическое содержаніе ; а учинился сіе , когда возмелся разность между обоими числами : слѣдов. арифметическое содержаніе , ничто иное есть , какъ разность между двумя числами. Которое послѣднее слово ( разность ) съ большою пристойностію въ семъ случаѣ употребляется , такъ , что слово содержаніе , при такъ называемомъ геомет-  
*рическо́мъ* содержаніи , только удержи-  
вается.

381.

Понеже разность между двумя числами находящаяся , когда меньшее число изъ большаго вычитается , то симъ образомъ разрѣшится вопросъ , чѣмъ одно число больше другаго . И такъ когда оба числа равны будутъ между собою ; то разность ихъ равна нулю , и ежели спросится , чѣмъ одно число больше другаго ? то отвѣчать надлѣжитъ : ни чѣмъ. Напр.  $6 = 2 \cdot 3$  , то разность между 6 и  $2 \cdot 3$  есть нуль.

382.

Если же оба числа будут не равны, как 5 и 3, а при этом спрашивается чѣмъ 5 больше 3хъ; отвѣтъ: 2мя, которое число найдется, ежели изъ 5 вычтется 3; равнымъ образомъ 15 5тью больше нежели 10, а 20 8ю больше 12ти.

383.

И такъ здѣсь входятъ въ разсужденіе слѣд. вещи; (1, большее число; (2, меньшее и на послѣдокъ въ 3тихъ разность, которые всѣ такое сопряженіе между собою имѣютъ, что ежели двѣ изъ оныхъ даны будутъ, то всегда найти можно третью. Пусть будетъ большее число  $\equiv a$ , меньшее  $\equiv b$ , разность  $d$ , то разность  $d$  найдется, ежели меньшее число изъ большего вычтется какъ  $d \equiv a - b$ , откуда видно какъ изъ данныхъ  $a$  и  $b$  находить  $d$ .

384.

Когда же даны будутъ меньшее число  $b$  и разность  $d$ , то изъ нихъ большее

шее найдется , когда къ меньшему при-  
даспся разность , то есть,  $a = b + d$  ; ибо  
если изъ  $b + d$  вычтется меньшее число  
 $b$  , то останется разность  $d$  . Положимъ  
меньшее число 12 и разность 8 , то  
большее будетъ  $= 20$  .

385.

А когда даны будутъ большое чи-  
сло  $a$  , и разность  $d$  , то меньшее най-  
дется , когда разность вычтется изъ  
большаго ; по чему  $a - d = b$  . Ибо когда  
я число  $a - d$  вычту изъ большаго  $a$  , то  
останется  $d$  данная разность .

386.

Изъ соединеній сихъ трехъ чиселъ,  
выходятъ 3 опредѣленія 1е  $d = a - b$  , 2е,  
 $a = b + d$  , 3е  $b = a - d$  , и еслии изъ сихъ  
трехъ уравненій, хотя одно которое ни-  
будь справедливо, то и всѣ прочія не-  
премѣнно справедливы ; слѣд: когда вооб-  
ще  $z = x + y$  , то будетъ не премѣнно  
 $y = z - x$  и  $x = z - y$  .

Р 2

387.

387.

При такомъ арифметическомъ содержаніи надлежитъ примѣчать, что когда къ обоимъ числамъ  $a$  и  $b$  какое нибудь число по произволѣнїю  $c$  придано или изъ нихъ вычтено будетъ, разность ихъ не перемѣняется. Слѣдовательно когда  $d$  есть разность между  $a$  и  $b$ , то та же самая разность будетъ между  $a+c$  и  $b+c$  или между  $a-c$  и  $b-c$  на прим. между числами 20 и 12 разность есть 8, то разность сія не перемѣнится естли къ 20 и 12 одно число придася или изъ нихъ вычтется.

388.

Доказательство сему очевидно: ибо когда  $a-b=d$ , то будетъ также  $(a+c)-(b+c)=d$  и  $(a-c)-(b-c)=d$ .

389.

Когда оба числа  $a$  и  $b$  удвоятся, то и разность между ими въ двое больше будетъ. Такъ когда  $a-b=d$ , то  $2a-2b$

$-2b=2d$  и вообще  $na-nb=nd$ , какое бы число мѣсто  $n$  взято ни было.

~~~~~

ГЛАВА II.

Объ арифметической пропорціи.

390.

Если два арифметическія содержанія равны будупъ между собою, то равенство сіе между ими называется *пропорція арифметическая*.

Такъ когда $a-b=d$ и $p-q=d$, то есть разность чиселъ p и q равна разности чиселъ a и b , то сіи 4 числа дѣлаютъ пропорцію арифметическую и пишутся $a-b=p-q$, чрезъ что ясно показывается, что разность между a и b столь же велика какъ, между p и q .

391.

По сему арифметическая пропорція состоитъ изъ 4 хъ членовъ, такого состоянія, что ежели второй членъ вы-

читается изъ перваго, въ остаткѣ пому же числу вышши должно, какое когда четвершой вычитается изъ третьяго. Числа 12, 7, 9, 4 дѣлаютъ ариѳметическую пропорцію, потому что $12-7=9-4$.

392.

Въ каждой ариѳметической пропорціи какъ $a-b=r-q$ еслили второй и третьей члены перемѣняюща, то будетъ также $a-r=b-q$, ибо когда $a-b=r-q$, то придай съ обѣихъ сторонъ b и будетъ $a=r-q+b$, потомъ вычми съ обѣихъ сторонъ r , то будетъ $a-b=b-q$ такъ когда $12-7=9-4$, то будетъ также $12-9=7-4$.

393.

Въ каждой ариѳметической пропорціи можно поставить второй членъ мѣсто перваго, а 4шой мѣсто третьяго, и тогда будетъ $b-a=q-r$. Ибо $b-a$ есть отрицательное въ разсужденіи $a-b$, равнымъ образомъ $q-r$ отрицательное въ разсужденіи $r-q$. Такъ когда $12-7=9-4$, то будетъ также $7-12=4-9$.

394.

394.

Въ каждой арифметической пропорціи особливо примѣчать надлежитъ, что сумма втораго и третьяго члена, всегда равна суммѣ перваго и четвертаго, что выговорить можно и такъ: сумма крайнихъ членовъ равна суммѣ среднихъ. Такъ когда $12 - 7 = 9 - 4$, то будетъ $12 + 4 = 7 + 9$: ибо каждая сумма $= 16$.

395.

Для доказательства сего важнаго свойства арифметической пропорціи, пусть будетъ $a - b = p - q$, придемъ съ обѣихъ сторонъ $b + q$, то получимся $a + q = b + p$, то есть, сумма перваго и четвертаго равна суммѣ втораго и третьяго члена. Равнымъ образомъ, когда 4 числа a, b, p, q будутъ такого состоянія, что сумма втораго и третьяго равна суммѣ перваго и четвертаго, т. е. $b + p = a + q$, то эти числа безъ сомнѣнія будутъ въ пропорціи арифметической, то есть, $a - b = p - q$, ибо когда $a + q = b + p$, то вычти

Р 4
съ

съ обѣихъ сторонъ $b + q$ и произойдетъ
 $a - b = p - q$.

Когда числа 18, 13, 15, 10 суть тако-
 го состоянія, что сумма среднихъ 13
 $+ 15 = 28$ равна суммѣ крайнихъ $18 + 10$
 $= 28$, то составятъ они пропорцію
 арифметическую, слѣдов. $18 - 13 = 15 - 10$.

3, 6.

Изъ сего свойства пропорціи мож-
 но легко разрѣшить слѣдующей вопросъ
 ели какой нибудь арифметической про-
 порціи даны будутъ три первыя члена,
 по какому нибудь четвертой. Пусть первыя
 3 члена будутъ a, b, p , а мѣсто четвер-
 таго искомаго напиши q , то получи-
 ся $a + q = b + p$, вычти съ обѣихъ сто-
 ронъ a и произойдетъ $q = b + p - a$, по се-
 му четвертой членъ находится, когда
 изъ суммы втораго и третьяго вычтешь
 первой. Положи наприм. 19, 28, 13 три
 первыя члена, то сумма втораго и тре-
 тьяго $= 41$ изъ нея вычтя первой 19
 останется 22 величина четвертаго иско-
 маго

маго члена, и пропорція ариѣметическая
будетъ $19-28=13-22$ или $28-19=22-13$,
или $28-22=19-13$.

397.

Когда въ ариѣметической пропор-
ціи второй членъ равенъ будетъ треть-
ему, то оставшіяся 3 числа суть тако-
го состоянія, что ежели изъ перваго
вычтешь второй, остатки равны бу-
дутъ, ежели изъ втораго вычтешь тре-
тей, или разность между первымъ и
вторымъ, равна будетъ разности меж-
ду вторымъ и третьимъ. Такія три
числа, суть 19, 15, 11, ибо $19-15=15-11$.

398.

Такія три числа идутъ въ ариѣме-
тической прогрессіи, копорая или ро-
стетъ, ежели второй членъ столько
больше перваго, чѣмъ третей превыша-
етъ второй, какъ въ семъ примѣрѣ: 4,
7, 10, или упадаетъ, когда числа рав-
номерно уменьшаются какъ 9, 5, 1.

399.

Пусть числа a, b, c будутъ въ арифметической прогрессіи, то должно быть $a - b = b - c$, откуда по равенству крайнихъ и среднихъ членовъ слѣдуетъ $2b = a + c$, и когда съ обѣихъ сторонъ отнимется a , то получится $2b - a = c$.

400.

И такъ когда какой нибудь арифметической прогрессіи даны будутъ два первыя члена a и b , то найдется изъ нихъ третей, ежели изъ удвоеннаго втораго члена вычтется первой. Пусть будутъ 1 и 3 два первыя члена арифметической прогрессіи, то третей членъ равенъ будетъ $2 \cdot 3 - 1 = 5$ и изъ чиселъ 1, 3, 5 будетъ сія пропорція $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

По сему правилу, такъ какъ изъ перваго и втораго члена находили третей, можно также изъ втораго и третьяго найти четвертой, и такъ далѣе арифметическую прогрессію продолжая можно

жно. Пусть будетъ первой членъ a и второй b , то третьей будетъ $2b - a$, четвертой $4b - 2a - b = 3b - 2a$ пятой $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$, шестой $8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$, седьмой $10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ и такъ далѣе.



ГЛАВА. III.

О прогрессіи арифметической.

402.

Рядъ чиселъ, которыя всегда равномерно растутъ или уменьшаются, изъ сколькихъ бы членовъ оной ни состоялъ, называется прогрессіею арифметическою.

Такъ всѣ натуральныя числа по порядку написанныя какъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и проч. дѣлаютъ арифметическую прогрессію, потому что они всегда растутъ единицею; рядъ 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 и проч. дѣлаетъ также арифметическую прогрессію, поелику всѣ сѣи числа 3 мя уменьшаются.

403.

403.

Число , которымъ арифметическая прогрессія растетъ или уменьшается , называется *разность* (*differentia*) ; и такъ когда первой членъ и разность даны будутъ , то арифметическую прогрессию можно продолжать такъ далеко , какъ пожелаешь , на прим. пусть первой членъ будетъ 2 , и разность 3 , то прогрессія возрастающая будетъ такая.

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 и проч. гдѣ каждой членъ находится , придавая разность къ предвѣдущему члену.

404.

Надъ членами такой арифм. прогрессіи , пишутся натуральные числа. 1, 2, 3, 4 и прочая , дабы шопчасъ увидѣть можно было , на которомъ мѣстѣ каждой членъ стоитъ , и сїи вверху написанныя числа *показателями* именуются. По сему прежней примѣръ , такъ написать можно.

показ.

показ.
 $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \text{ариом. прогр.} & 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26, & 29 \end{matrix}$
 изъ чего видно, что 29 есть 10 той членъ.

405.

Пусть будетъ первой членъ a ,
 разность d , то прогрессія арифметическая выйдетъ такая:

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d \end{matrix}$
 откуда легко каждой членъ найти можно, не имѣя нужды знать всѣхъ предъидущія члены, изъ одного только перваго члена a и разности d , какъ напр. 10 той членъ будетъ $a+9d$, сопой $\equiv a+9d$ и вообще n той членъ $\equiv a+(n-1)d$.

406.

Ежели прогрессія арифметическая гдѣ нибудь перервется, то должно особливо наблюдать первой и послѣдней члены и показателя послѣдняго члена, которой показываетъ число членовъ. Такъ, когда первой членъ $\equiv a$, разность $\equiv d$ и число членовъ $\equiv n$, то послѣдней членъ
 будетъ

будетъ $=a+(n-1)d$, которой найдется ежели разность умножится на число членовъ, уменьшенное единицею и къ произведенію придается первой членъ, на прим. пусть будетъ ариѳметическая прогрессія состоящая изъ 100 членовъ , которой первой членъ $=4$, разность $=3$, то послѣдней ея членъ будетъ $99.3+4=301$.

407.

Когда даны первой членъ $=a$, послѣдней $=z$ и число членовъ $=n$, то изъ нихъ можно найши разность $=d$. Понеже послѣдней членъ $z=a+(n-1)d$, то вычти съ обѣихъ сторонъ a , и будетъ $z-a=(n-1)d$, и такъ когда изъ послѣдняго члена вычтется первой, останется разность умноженная на число членовъ единицею уменьшенное, или $z-a$ есть произведеніе $(n-1)d$; чего ради когда $z-a$, $=$ раздѣлится на $(n-1)$, то получится искомая разность d или $d=\frac{z-a}{n-1}$; отсюда происходитъ правило слѣдующее, изъ послѣдняго члена вычти первой, остатокъ раздѣли на число членовъ , уменьшенное единицею и получишя

лучится разность, изъ которой попомъ всю прогрессію дополнить можно.

408

Данной ариѣметической прогрессіи состоящей изъ 9 членовъ, въ которой первой членъ 2 и послѣдней 26 найти разность. Въ семъ случаѣ должно первой членъ 2 вычесть изъ послѣдняго 26 остатокъ 24 раздѣлить на 9—1, то есть, на 8, и получится разность=3, самая же прогрессія будетъ.

$\overset{1}{2}, \overset{2}{5}, \overset{3}{8}, \overset{4}{11}, \overset{5}{14}, \overset{6}{17}, \overset{7}{20}, \overset{8}{23}, \overset{9}{26}$.
Другой примѣръ. Пусть будетъ первой членъ =1 послѣдней 2, а число членовъ =10, ищется ариѣметическая прогрессія. Здѣсь разность будетъ $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$, по чему искомая прогрессія выйдетъ :

$\overset{1}{1}, \overset{2}{1\frac{1}{9}}, \overset{3}{1\frac{2}{9}}, \overset{4}{1\frac{3}{9}}, \overset{5}{1\frac{4}{9}}, \overset{6}{1\frac{5}{9}}, \overset{7}{1\frac{6}{9}}, \overset{8}{1\frac{7}{9}}, \overset{9}{1\frac{8}{9}}, \overset{10}{2}$.
Третьей примѣръ. Пусть будетъ первой членъ $2\frac{1}{3}$, послѣдней $12\frac{1}{2}$, а число членовъ 7, отсюда получится разность

$\frac{12\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$ слѣдовательно
прогрессія будетъ :

$$2\frac{1}{3}, 4\frac{1}{36}, 5\frac{13}{18}, 7\frac{5}{12}, 9\frac{1}{9}, 10\frac{29}{36}, 12\frac{1}{2}$$

409.

Ежели даны будутъ первой членъ a , послѣдній z , и разность d , то можно найти число членовъ n . Ибо когда $z - a = (n - 1)d$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на d , и произойдетъ $\frac{z - a}{d} = n - 1$, а поелику n единицею больше нежели $n - 1$, то будетъ $n = \frac{z - a}{d} + 1$; слѣдовательно число членовъ найдется, когда разность перваго и послѣдняго члена раздѣлится на разность прогрессіи, и къ частному придастся единица.

Пусть будетъ наприм. первой членъ $= 4$, послѣдней $= 100$, и разность $= 12$, то число членовъ будетъ $= 9$, которые суть слѣдующіе:

$$4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100$$

Пусть

Пусть будетъ первой членъ $= 2$ послѣдней 6, и разность $= 1\frac{1}{3}$, то число членовъ будетъ $1\frac{4}{3} + 1 = 4$ которые суть $2^1, 3\frac{1}{3}^2, 4\frac{2}{3}^3, 6^4$.

Положимъ еще первой членъ $= 3\frac{1}{3}$ послѣдней $7\frac{2}{3}$, и разность $= 1\frac{4}{9}$, то число членовъ будетъ $\frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$,

которые будутъ $3\frac{1}{3}^1, 4\frac{7}{9}^2, 6\frac{2}{9}^3, 7\frac{2}{3}^4$.

410.

Здѣсь примѣчать надлежитъ, что число членовъ непремѣнно должно быть цѣлое число. Слѣдовательно ежели бы въ прежнемъ примѣрѣ мѣсто n нашлася дробь, то бы сей вопросъ совсѣмъ не годился.

Ежели бы для $\frac{z-a}{d}$ не нашлося никакого цѣлаго числа, то бы сего вопроса рѣшить не можно было, и надлежало бы отвѣтствовать, что оной вопросъ не возможенъ. По сей причинѣ въ такихъ задачахъ число $z-a$ должно дѣлиться на d

411.

Въ каждой арифметической прогрессіи 4 слѣдующіе вещи примѣчаютъ надлежитъ.

1. первой членъ $= a$. 2. послѣдней $= z$
3. разность $= d$. 4. число членовъ $= n$,
 которые всѣ суть такого состоянія,
 что еслили 3 которые нибудь изъ нихъ
 даны будущъ, можно опредѣлить чет-
 вертую.

Какъ 1. когда a , d и n извѣстны,

то будетъ $z = a + (n - 1)d$

2 - - - - z , d и n извѣстны

$$a = z - (n - 1)d$$

3 - - - - a , z , n извѣстны

$$d = \frac{z - a}{n - 1}$$

4 - - - - a , z и d извѣстны

$$n = \frac{z - a}{d} + 1.$$



ГЛАВА IV.

О нахожденіи суммы арифметической прогрессіи.

412.

Когда предложена будетъ прогрессія арифметическая , то ищется иногда ея сумма ; которая найдется сложивъ всѣ члены данной прогрессіи въ одно мѣсто. Но поелику сіе сложеніе медлительно бы было , ежели бы прогрессія изъ многихъ членовъ состояла , то можно найти правило , по которому сія сумма очень легко найдена быть можетъ. Что заразъ покажется.

413.

Разсмотримъ сперва одну опредѣленную прогрессію , какъ $\overset{1}{2}, \overset{2}{5}, \overset{3}{8}, \overset{4}{11}, \overset{5}{14}$
 $\overset{6}{17}, \overset{7}{20}, \overset{8}{23}, \overset{9}{26}, \overset{10}{29}$, въ которой первой членъ $\equiv 2$, послѣдней $\equiv 29$, разность $\equiv 3$ и число членовъ $\equiv 10$. Въ сей прогрессіи сумма перваго и послѣдняго членовъ есть

С 2

31,

31, сумма втораго и предпослѣдняго $= 31$, сумма третьяго и втораго отъ послѣдняго $= 31$, сумма 4го и третьяго отъ послѣдняго $= 31$ и такъ далѣе. Отсюда видно что каждахъ двухъ членовъ отъ краевъ равно отстоящихъ сумма всегда одинака.

414.

Причина сему очевидна, ибо когда первой членъ равенъ a , разность $= d$, послѣдней членъ $= z$, то сумма перваго и послѣдняго $= a + z$, попомъ второй членъ $a + d$, и первой отъ послѣдняго $= z - d$, которые вмѣстѣ взятые дѣлаютъ $a + z$; третьей членъ $= a + 2d$ и второй отъ послѣдняго $= z - 2d$ составятъ вмѣстѣ $a + z$, откуда истинна прежняя положенія явствуется,

415.

Дабы сыскать сумму прежней прогрессіи, то есль $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$, то напиши подъ нею ту же суму прогрессію наизворотъ.

и складывай членъ съ членомъ какъ слѣдуетъ:

$$\begin{array}{r} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Сей найденной изъ равныхъ членовъ состоящей рядъ есть въ двое больше, нежели сумма нашей прогрессіи: число сихъ равныхъ членовъ есть 10, такъ какъ и въ прогрессіи, слѣд. сумма сего ряда будетъ $10 \cdot 31 = 310$; но поелику они въ двое больше нежели сумма данной арифметической прогрессіи, слѣдовательно истинная сумма будетъ $= 155$.

416.

Ежели подобнымъ образомъ поступать будешь съ каждою арифметическою прогрессіею, въ которой первой членъ $= a$, послѣдней $= z$ и число членовъ $= n$, то написавъ ту же самую прогрессію, въ обратномъ порядкѣ подъ первую, и членъ съ членомъ сложивъ, получишь каждой членъ $= a + z$ числомъ n ; слѣдовательно

С 3

сумма

сумма ихъ будетъ $= n(a+z)$, которая въ
двое больше суммы прогрессіи , чего ра-
ди самая сумма прогрессіи ариѣм. бу-
детъ $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Отсюда получаемъ мы для нахож-
денія суммы каждой ариѣметической про-
грессіи слѣдующее правило:

Умножь сумму перваго и послѣдняго
члена прогрессіи на число членовъ , по-
лови́на сего произведенія покажетъ сумму
всей прогрессіи.

Или , что все равно : умножь сум-
му перваго и послѣдняго члена на поло-
вину числа членовъ.

Или умножь половину суммы перва-
го и послѣдняго членовъ , на цѣлое чи-
сло членовъ , и получи́ся сумма всей
прогрессіи.

418.

Для извѣсненія сего правила надле-
житъ предложить здѣсь нѣсколько при-
мѣровъ. Пусть дана будетъ прогрессія
натуральныхъ чиселъ отъ 1 до 100, най-
ми

ши ея сумму. По первому правилу она будетъ $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Спрашивается сколько всѣхъ ударовъ будетъ въ 12 часахъ. Сюда принадлежатъ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, до 12, коихъ сумма будетъ $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Ежели бы надобно было знать сумму того же ряда чиселъ до 1000, то будетъ она $= 500500$, а до 10000 она будетъ $= 50005000$.

419.

Вопросъ. Нѣкто покупаетъ лошадь съ такимъ договоромъ, чтобы за первой подковной гвоздь заплашить ему 5 копѣекъ, за другой 8 коп., а за третьей 11 и такъ далѣе, за каждой слѣдующей гвоздь по три копѣйки больше, всѣхъ же гвоздей было 32: сколь дорога стала ему лошадь?

Здѣсь ищется сумма арифметической прогрессіи, въ которой первый членъ $= 5$, разность $= 3$ число членовъ $= 32$.

Сыщи сперва послѣдней членъ , которой по выше сего данному правилу найдется $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, а изъ сего уже искомая сумма будетъ $= \frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$. и такъ лошадь стоятъ будетъ 1648 копѣскъ, или 16 рублей 48 коп.

420.

Пусть будетъ вообще первой членъ $= a$, разность $= d$ и число членовъ $= n$, найти сумму всей прогрессіи. Понеже послѣдней членъ долженъ быть $= a + (n-1)d$, то сумма перваго и послѣдняго $= 2a + (n-1)d$, которую умножа на число членовъ получишь $2na + n(n-1)d$, и искомая сумма будетъ $= na + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Когда въ первомъ примѣрѣ было $a=5$, $d=3$, $n=32$, то по сей формулѣ будетъ сумма $= 5 \cdot 32 + \frac{32 \cdot 31 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ какъ и прежде.

421.

Ежели должно будетъ найти сумму ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n , то въ семъ примѣрѣ первой членъ
будетъ

будетъ $=1$, послѣдней $=n$, и число членовъ также n , по чему сумма $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$.

Ежели n положится 1766, то сумма всѣхъ членовъ отъ 1 до 1766 $=883.1767=1560261$.

422.

Данной прогрессіи нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7 и проч. продолжающейся до числа членовъ n найти сумму.

Въ сей прогрессіи первой членъ $=1$, разность $=2$, число членовъ $=n$, потому послѣдней членъ будетъ $1+(n-1)2=2n-1$, а искомая сумма $=nn$.

И такъ здѣсь должно только число членовъ умножить само на себя. Того ради, сколько бы членовъ такой прогрессіи ни требовалось сложить въ одну сумму , то она всегда равна будетъ квадрату числа членовъ , какъ изъ слѣдующаго явствуетъ:

Прогр. — 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 и проч.

Сумма — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 и про

Члены — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и про.

423.

Пусть еще будетъ первой членъ $= 1$, разность $= 3$ число членовъ $= n$, то прогрессія выйдетъ такая 1, 4, 7, 10, 13 и проч. въ которой послѣдней членъ $= 1 + (n-1)3 = 3n-2$, сумма первого и послѣдняго $= 3n-1$, слѣд. сумма прогрессіи $= \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$; и ежели n положится 20 то сумма будетъ $10.59 = 590$.

424.

Положимъ первой членъ $= 1$, разность $= d$, число членовъ $= n$, то послѣдней членъ будетъ $= 1 + (n-1)d$, сумма первого и послѣдняго $= 2 + (n-1)d$, сіе умноживъ на число членовъ выйдетъ $2n + n(n-1)d$, и сумма всей прогрессіи $= \frac{2n + n(n-1)d}{2} = n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

Присовокупимъ еще здѣсь слѣдующую табличку.

Когда

когда $d=1$ то сумма прогрессіи будетъ $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$$d=2 \quad \text{---} \quad n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$$

$$d=3 \quad \text{---} \quad n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn - n}{2}$$

$$d=4 \quad \text{---} \quad n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$$

$$d=5 \quad \text{---} \quad n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn - 5n}{2}$$

$$d=6 \quad \text{---} \quad n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn - 2n$$

$$d=7 \quad \text{---} \quad n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn - 7n}{2}$$

$$d=8 \quad \text{---} \quad n + \frac{8n(n-1)}{2} = nn - 3n$$

$$d=9 \quad \text{---} \quad n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn - 9n}{2}$$

$$d=10 \quad \text{---} \quad n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$$

ГЛАВА V.

● фигурныхъ или многоугольныхъ числахъ.

425.

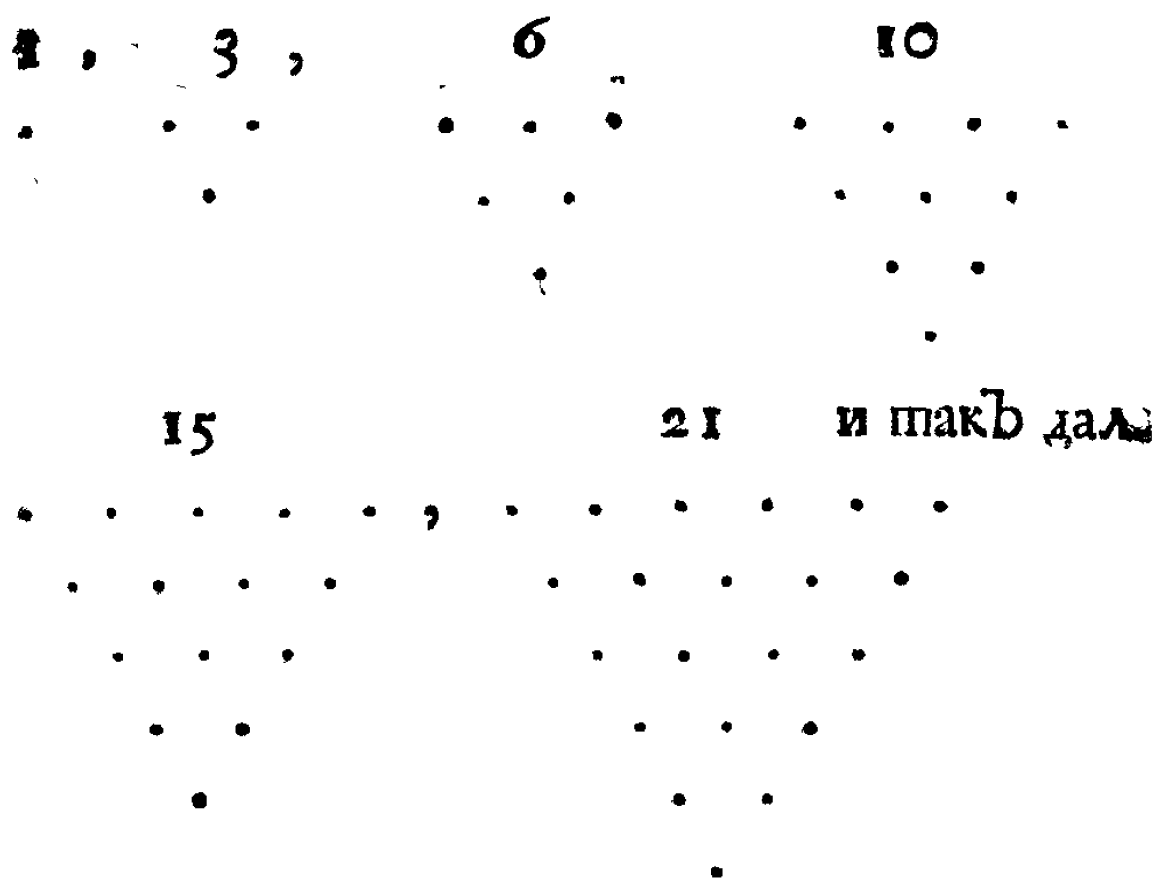
Слаганіе въ одну сумму арифметической прогрессіи, которая отъ 1 начинается, а разность имѣетъ или 1, или 2, или 3, или какое нибудь другое по изволению
взятое

взятое число , ведетъ насъ къ познанію фигурныхъ чиселъ , кои производятъ , когда нѣкоторыя члены такой прогрессіи вмѣстѣ складываются.

426.

Когда положится разность $= 1$, между тѣмъ первой членъ всегда долженъ быть 1 , то произойдетъ отсюда слѣдующая арифметическая прогрессія 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и проч. и ежели въ сей прогрессіи возьмуться суммы 2хъ , 3хъ , 4хъ . и проч. членовъ , то произойдетъ отсюда слѣдующей рядъ чиселъ.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 и пр. такъ что $1=1$. $3=1+2$, $6=1+2+3$, $10=1+2+3+4$ и такъ далѣе ; и сіи числа называются *треугольные числа* , пошому что сколько точекъ , сколь велики такіе числа будутъ , представить можно въ треугольникахъ. Какъ



427.

Въ каждомъ изъ сихъ треугольниковъ видно сколько точекъ въ каждомъ боку содержится ; въ первомъ только одна, во второмъ 2 , въ третьемъ 3 , въ четвертомъ 4 и такъ далѣе. Слѣдовательно отъ числа точекъ въ каждомъ боку содержащихся зависятъ треугольные числа, или число всѣхъ пунктовъ , которые просто треугольниками называются.

Сторона.
 Треугольникъ.

сторон.
 треугольн.

428.

И такъ спрашивается здѣсь, какимъ образомъ изъ даннаго боку найти треугольникъ, что помощію вышепоказанныхъ правилъ легко учиниться можетъ : ибо пусть будетъ данная сторона треугольника n , то самой треугольникъ будетъ $1+2+3 \dots +n$, то есть сумма $= \frac{n(n+1)}{2}$; и ежели $n=1$, треугольникъ $=1$

буде же $n=2$, то треугольникъ $=3$

$n=3$ — — — — — $=6$

$n=4$ — — — — — $=10$

и такъ далѣе.

и когда $n=100$, то треугольникъ $=5050$

419.

429.

Сія формула $\frac{n(n+1)}{2}$ называется генеральною формулою всѣхъ треугольных чиселъ ; ибо по оной для каждаго бока n треугольное число сыскать можно.

Оная формула можетъ извѣдена быть и такимъ образомъ $\frac{n(n+1)}{2}$, которая много служишь къ облегченію выкладки ; потому , что n или $n+1$ всегда будетъ четное число , и слѣдовательно дѣлился на 2.

Такъ когда $n=12$, то треугольникъ $=\frac{6}{12 \cdot 13} = 6 \cdot 13 = 78$. или когда $n=15$, то треугольникъ $=\frac{5}{15 \cdot 16} = 15 \cdot 8 = 120$.
и такъ далѣе.

430.

Ежели разность положится $=2$, то произойдетъ слѣдующая прогрессія 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 и проч. и суммы ея будутъ.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и пр. копорые числа называются **четыреугольные**

ныя числа, и суть тѣ же самыя, которые мы прежде квадратами назвали: ибо столько почекъ, сколько велико сѣ число, можно поставитъ въ четырехугольникъ, такъ:

1	,	4	,	9	,	16	,	25
.	
	
		
			
						.	.	.
							.	.

431.

Здѣсь видно, что бокъ такого четырехугольника, столько содержитъ въ себѣ почекъ, сколь великъ его квадратной корень: слѣдовательно стороны 5, четырехугольникъ 25, стороны 6, четырехугольникъ 36; и вообще ежели сторона будетъ n , которымъ число членовъ прогрессіи 1, 3, 5, 7 и проч. означается, то четырехугольникъ будетъ сумма всѣхъ оныхъ членовъ, которая найдена прежде $= \frac{n^2}{2}$; но о семъ четырехугольникъ или квадратъ говорено уже выше сего пространства.

432.

Ежели положится разность прогрессіи $= 3$, и равнымъ образомъ, какъ и прежде возьмуться суммы, то сіи будутъ числа пятиугольныя, хощя точками ихъ представить и не можно.

Оныя идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ:
 показатель 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
 арием. прогр. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22,
 пятиугольник. 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92,
 показатель означаетъ бокъ пятиугольника:

433.

И такъ когда сторона положится n , то пятиугольное число будетъ $= \frac{3nn-n}{2}$; напр. когда $n=7$, то пятиугольникъ будетъ $= 70$; ежели же кпо похочетъ знать пятиугольное число, котораго сторона $= 100$, то положи $n=100$ и получишь 14950 искомое пятиугольное число.

434.

Когда разность прогрессіи будетъ 4, то изъ оныя получатся шестиугольныя числа, которыхъ порядокъ такой:

Т

показ.

показ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
 пр. ар. 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37,
 бшиуг. 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,
 гдѣ показатели означаютъ какъ и прежде
 сторону шестиугольника.

435.

Такимъ образомъ если данная
 сторона будетъ $=n$, то бшиугольникъ
 $=2n - n$; причемъ примѣчать надлежитъ,
 что всѣ сѣи бшиугольныя числа вмѣстѣ
 суть и треугольныя; ибо когда въ тре-
 угольныхъ числахъ всегда станешь пере-
 ступать черезъ число, то получишь
 бшиугольныя.

436.

Подобнымъ образомъ находятся
 7, 8, 9 и 10 шиугольныя числа, для
 коихъ мы здѣсь общую формулу пред-
 лагаемъ. Положа сторону $=n$ выдутъ

$$\text{треугольникъ} = \frac{nn + n}{2}$$

$$4 \text{ угольникъ} = \frac{2nn + nn}{2} = nn$$

$$5 \text{ угольникъ} = \frac{3nn - n}{2}$$

6 уголь-

$$6 \text{ угольникъ } = \frac{4nn - 2n}{2} = 2nn - n$$

$$7 \text{ угольникъ } = \frac{5nn - 3n}{2}$$

$$8 \text{ угольникъ } = \frac{6nn - 4n}{2} = 3nn - 2n$$

$$9 \text{ угольникъ } = \frac{7nn - 5n}{2}$$

$$10 \text{ угольникъ } = \frac{8nn - 6n}{2} = 4nn - 3n$$

$$11 \text{ угольникъ } = \frac{9nn - 7n}{2}$$

$$12 \text{ угольникъ } = \frac{10nn - 8n}{2} = 5nn - 4n$$

$$20 \text{ угольникъ } = \frac{18nn - 16n}{2} = 9nn - 8n$$

$$25 \text{ угольникъ } = \frac{23nn - 21n}{2}$$

$$m \text{ угольникъ } = \frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$$

437.

И такъ когда данъ будетъ бокъ n , то найдется вообще m угольникъ $= \frac{(m-2)nn - (m-4)n}{2}$, изъ которой формулы всѣ возможные многоугольные числа найти можно, положа сторону ихъ $= n$.

Т 2

Если

Ежели бы хотѣлъ кто по сей формулѣ найти двуугольное число, то было бы $m=2$, а число двуугольное $=n$

Ежели будешь $m=3$, то треугольное число $=\frac{nn+n}{2}$, или ежели $m=4$, то четырехугольное число $=m$, и такъ далѣе.

438.

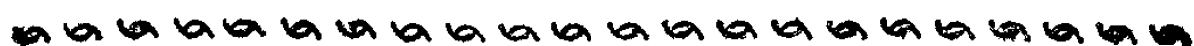
Что бы изъяснить правило сіе примѣрами, то ищи 25 угольное число, коего сторона $=36$; найди сперва бока и 25 угольное число, которое будешь $=\frac{25nn-21n}{2}$, теперь положи $n=36$ и исконое число будешь $=14526$.

439.

Вопросъ. Нѣкто купилъ себѣ домъ и спрашивается, сколь дорого онъ за него заплатилъ? на то онъ отвѣтствуетъ, что число рублей, которое онъ за него далъ есть 365 угольное число 12. пи

При

При рѣшеніи сего вопроса $m=365$ и слѣдовательно 365 угольное число бока n будетъ $\frac{363n-361n}{2}$; но $n=12$, по чему искомая цѣна дома $=23970$ рублей.



ГЛАВА VI.

О содержаніи геометрическомъ.

440.

Геометрическое содержаніе двухъ чиселъ бываетъ при вопросѣ, во сколько разъ одно число больше другаго; и ежели одно изъ сихъ двухъ чиселъ раздѣлится на другое, то частное отсюда произшедшее называется знаменатель сего содержанія.

441.

Въ геометрическомъ содержаніи надлежитъ разсмотрѣть три вещи: I.) изъ данныхъ двухъ чиселъ первое, которое предвидущимъ членомъ именуется, II.) другое изъ данныхъ послѣдующимъ членомъ называемое, III.) знаменатель содержанія

жанія , которой находишся чрезъ дѣленіе предвидущаго члена на послѣдующей. Такъ когда между двумя числами 18 и 12 должно будетъ опредѣлить ихъ содержаніе , то 18 будетъ предвидущей , 12 послѣдующей членъ , а знаменатель $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; откуда познается, что предвидущей членъ содержишь въ себѣ послѣдующей полтора раза.

442.

Для означенія геометрическаго содержанія между двумя числами употребляются двѣ другъ надъ другомъ стоящія точки , которые ссылаются между предвидущимъ и послѣдующимъ членами.

Такъ $a : b$ означаетъ содержаніе между a и b , коимъ знакомъ , какъ уже выше сего упомянуто , означають также и дѣленіе ; и для сей самой прищчины онъ здѣсь употребляется : ибо что бы узнать величину сего содержанія , должно число a раздѣлить на b ; а словами сей

сей знакъ изображается такъ : а содер-
жится къ b или просто a къ b .

443.

Знаменатель сего содержанія озна-
чается дробью , въ которой числитель
есть предвѣдущей членъ , а знамена-
тель послѣдующей. А для ясности
дробь сію изображать надлежитъ малы-
ми числами , что учинится , когда чи-
слитель и знаменатель раздѣлятся на са-
маго большаго общаго дѣлителя , какъ
выше сего учинено было , когда дробь
 $\frac{18}{12}$ приведена была въ $\frac{3}{2}$ числителя , а зна-
менателя раздѣля на 6.

444.

Сіи содержаніи разнятся по различ-
ности ихъ знаменателей , и посему мо-
жетъ быть ихъ столько родовъ , сколь-
ко различныхъ знаменателей найти мо-
жно.

Первой ихъ родъ безспорно долженъ
быть когда знаменатель $= 1$; а сіе учи-
нится когда оба числа равны будутъ :

Т 4

какъ

какъ $3 : 3$, ибо сихъ чиселъ знаменатель $= 1$, и для того содержаніемъ равенства называется. По семъ слѣдуютъ тѣ роды содержанія, въ которыхъ знаменатели суть цѣлые числа какъ $4 : 2$, гдѣ знаменатель 2; $12 : 4$ и мѣстѣ знаменателя 3; а $24 : 6$ знаменатель его $= 4$ и прочя, и на послѣдокъ тѣ содержанія коихъ знаменатели суть не цѣлые числа но дроби, какъ $12 : 19$ котораго знаменатель $\frac{4}{3}$ или $1\frac{1}{3}$.

445.

Пусть будетъ a предвидущей членъ, b послѣдующей, а знаменатель $= d$, то уже мы видѣли, что изъ данныхъ a и b найдется $d = \frac{a}{b}$.

Если же данъ будетъ послѣдующей b и знаменатель d , то предвидущей найдется $a = bd$, потому что bd раздѣленное на b даетъ d , и наконецъ когда данъ будетъ предвидущей членъ a и знаменатель d , то послѣдующей будетъ $= b = \frac{a}{d}$: ибо когда предвидущей a раздѣлится

дѣлится на послѣдующей $\frac{a}{d}$, то частное дастъ знаменателя d .

446.

Каждое содержаніе какъ $a : b$ не перемѣнится, ежели предвѣдущей и послѣдующей члены на одно число помножатся или раздѣлятся: потому что знаменатель его будетъ то же самое число. Наприм. когда d есть знаменатель содержанія $a : b$, такъ что $d = \frac{a}{b}$, то будетъ также содержанія $na : nb$ знаменатель $\frac{a}{b} = d$; равнымъ образомъ содержанія $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ знаменатель $\frac{a}{b} = d$ тотъ же самой, какой былъ и въ данномъ содержаніи.

447.

Ежели знаменатель содержанія самими малыми числами изобразится, то сіе содержаніе можно будетъ выразить словами очень ясно; а именно ежели знаменатель приведется въ дробь $\frac{p}{q}$, то говорятъ $a : b = p : q$. Такъ содержанія $6 : 3 = 2 : 1$, равнымъ образомъ

$18 : 12 = 3 : 2$; $24 : 18 = 4 : 3$ и $30 : 45 = 2 : 3$; ежели же знаменателя сократить не лзя будетъ, то и содержанія яснае изъяснить не можно : ибо ежели скажется $9 : 7 = 9 : 7$, то отъ сего не прибуетъ ни малой ясности.

448.

Ежели же знаменателя изъяснить можно будетъ въ самыхъ малыхъ числахъ, то чрезъ сѣ получится ясное понятіе о содержаніи двухъ весьма большихъ чиселъ. Такъ когда скажется $288 : 144 = 144 : 72$ или $= 72 : 36 = 36 : 18$ или $= 8 : 9 = 6 : 3$ или $= 2 : 1$, то сѣ содержаніе будетъ совсѣмъ вразумительно, и ежели спросится, какъ $105 : 70$ содержится, то отвѣствуется какъ $3 : 2$; когда же опять спросятъ какъ $576 : 252$ содержащаяся, отвѣствуется какъ $16 : 7$.

449.

И такъ чтобы каждое содержаніе наияснѣйшимъ образомъ представить можно было, то знаменателя онаго стараться должно изъяснить самыми малыми числами

числами , что учинится , когда оба члена содержанія на самого большаго общаго ихъ дѣлителя раздѣлятся. Такъ содержаніе $576 : 252$ вдругъ превратившся въ $16 : 7$, когда оба числа 576 и 252 на 36 , какъ на самого большаго общаго ихъ дѣлителя раздѣлятся.

450.

Понеже главное дѣло здѣсь состоитъ въ томъ , какимъ образомъ данныхъ двухъ чиселъ найти самого большаго общаго дѣлителя , то въ слѣдующей главѣ преподано будетъ надлежащее къ тому наставленіе.

~~~~~

## Г Л А В А VII.

О большемъ общемъ дѣлителѣ двухъ данныхъ чиселъ.

451.

Есть числа , которые кромѣ 1 никакого другаго общаго дѣлителя не имѣютъ ,

и

и когда числитель и знаменатель какой ни будь дроби будущъ такого соспоянїя, то не можно и сократить оныя; и такъ видно что два числа 48 и 35 не имѣютъ ни какого общаго дѣлителя, не смотря на то, что каждое изъ нихъ особливога дѣлителя имѣетъ. Для сей причины содержанїя  $48 : 35$  простяе изъяснить не можно, ибо хотя они оба дѣлятся на 1, но отъ сего дѣленїя числа ни мало не уменьшаются.

452.

Ежели же числа имѣютъ общаго дѣлителя, то оной, и припомъ самой большой найдется по слѣдующему правилу.

Раздѣли большее число на меньшее, на остатокъ отъ сего дѣленїя раздѣли прежняго дѣлителя, на сей остатокъ раздѣли послѣдняго дѣлителя, и симъ образомъ дѣленїе продолжай до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ ни чего не будетъ, и послѣдней дѣлитель будетъ самой

самой большой общей дѣлитель обоихъ данныхъ чиселъ.

Сіе разысканіе данныхъ чиселъ 576  
252 будетъ такое:

$$\begin{array}{r}
 252 \overline{) 576} 2 \\
 \underline{504} \\
 72 \overline{) 252} 3 \\
 \underline{216} \\
 36 \overline{) 72} 2 \\
 \underline{72}
 \end{array}$$

Слѣдовательно самой большей общей дѣлитель , сихъ двухъ чиселъ есть 36.

453.

Для извѣщенія сего правила не безнужно здѣсь предложить нѣсколько примѣровъ. Чего ради ищи самаго большаго общаго дѣлителя чиселъ 504 и 312 такъ:



$$\begin{array}{r}
 812 \overline{) 504} 1 \\
 \underline{312} \\
 192 \overline{) 312} 1 \\
 \underline{192} \\
 120 \overline{) 192} 1 \\
 \underline{120} \\
 72 \overline{) 120} 1 \\
 \underline{72} \\
 48 \overline{) 72} 1 \\
 \underline{48} \\
 24 \overline{) 48} 2 \\
 \underline{48}
 \end{array}$$

Слѣд. 24 есть самой большей общей дѣлитель , почему содержаніе  $504 : 312$  переменяется въ  $21 : 13$ .

454.

Пусть даны будутъ еще два числа 625 и 529 , коихъ сыскать надлежитъ самого большого общаго дѣлителя:

$$\begin{array}{r}
 529 \overline{) 625} 1 \\
 \underline{529} \phantom{00} \\
 96 \overline{) 529} 5 \\
 \underline{480} \phantom{00} \\
 49 \overline{) 96} 1 \\
 \underline{49} \phantom{00} \\
 47 \overline{) 49} 1 \\
 \underline{47} \phantom{00} \\
 2 \overline{) 47} 23 \\
 \underline{4} \phantom{00} \\
 7 \\
 6 \\
 \hline
 1 \overline{) 2} 2 \\
 \underline{2} \phantom{00}
 \end{array}$$

Здѣсь самой большой общей дѣлитель будетъ 1, почему содержаніе 625 : 529 сократиться не можетъ, или его ни въ какихъ меньшихъ числахъ изъяснить не лзя.

455.

Теперь надлежитъ еще доказать сѣ правило. Пусть будетъ  $a$  большее а  $b$  меньшее число изъ данныхъ,  $d$  общей ихъ

ихъ дѣлитель ; и поелику какъ  $a$ , такъ и  $b$  дѣлятся на  $d$ , то можетъ также и  $a-b$  на него раздѣлиться, подобнымъ образомъ  $a-2b$ ,  $a-3b$  и вообще  $a-nb$ .

457.

При семъ примѣчать надлежитъ, что ежели  $d$  есть самой большей общей дѣлитель чиселъ  $b$  и  $a-nb$ , то онъ же будетъ самой большей общей дѣлитель чиселъ  $b$  и  $a$ : ибо когда бы для чиселъ  $a$  и  $b$  нашелся еще большей общей дѣлитель нежели  $d$ , то бы онъ былъ также общей дѣлитель чиселъ  $b$  и  $a-nb$ , слѣд.  $d$  не былъ бы самой большой дѣлитель ; но здѣсь  $d$  есть самой большой общей дѣлитель, слѣд. онъ же долженъ быть самой большой чиселъ  $a$  и  $b$ .

458.

Предложивъ сіи три положенія, раздѣлимъ большее число  $a$  на меньшее  $b$ , какъ самое правило повелѣваетъ, а мѣсто частнаго возьмемъ  $n$ , остатокъ бу-  
детъ

дѣлѣ  $a - nb$ , которой всегда меньше нежели  $b$ ; ежели сей остатокъ  $a - nb$ , съ дѣлителемъ  $b$  того общаго дѣлителя имѣетъ, какъ данныя числа  $a$  и  $b$ , то раздѣли прежняго дѣлителя  $b$  на остатокъ  $a - nb$ , и произшедшей отсюда остатокъ съ предѣдущимъ дѣлителемъ опять будетъ имѣть одного общаго дѣлителя, и такъ далѣе.

## 459.

Симъ образомъ продолжается пока дѣленіе не кончится, или покуда въ остаткѣ ничего не будетъ. Пусть будетъ послѣдней дѣлитель  $p$ , которой почтенъ нѣсколько разъ въ своемъ дѣлимомъ содержится, и для того дѣлимое на  $p$  дѣлится, и имѣть будетъ форму  $tr$ . Сии числа  $p$  и  $tr$  оба могутъ дѣлиться на  $p$ , и подлинно другаго общаго дѣлителя не имѣютъ, потому что никакое число на большее, нежели оно само раздѣлиться не можетъ. По сей причинѣ послѣдней дѣлитель будетъ самой большою общей дѣлителею съ начала предложенныхъ

у

женныхъ

женных чисел  $a$  и  $b$ ; и симъ образомъ предписанное правило доказывается.

460.

Предложимъ еще примѣръ и станемъ искать самаго большого общаго дѣлителя чиселъ 1728 и 2304; выкладка будетъ слѣдующая :

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2304 \\ \hline & 1728 \\ \hline & 576 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ \\ 3 \end{array}$$

И такъ 576 есть самой большой общей дѣлитель, и содержаніе 1728 : 2304 переменяется въ 3 : 4 слѣдовательно  $1728 : 2304 = 3 : 4$ .

~~~~~

ГЛАВА VIII.

О пропорціи геометрической.

461.

Два геометрическія содержанія между собою равны, когда ихъ знаменатели равны

равны; а равенство такихъ двухъ содержаній пропорціею геометрическою называется и пишется такъ $a : b = c : d$, а выговаривается a содержится къ b такъ какъ c къ d ; примѣръ сей пропорціи есть $8 : 4 = 12 : 6$; ибо содержанія $8 : 4$ знаменатель $= \frac{2}{1}$, и содержанія $12 : 6$ также $\frac{2}{1}$.

462.

И такъ когда $a : b = c : d$ есть пропорція геометрическая, то съ обѣихъ сторонъ знаменатели должны быть одинакіе, и слѣдовательно $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, и обратно когда дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны между собою, то $a : b = c : d$.

463.

По сему геометрическая пропорція состоять должна изъ 4 членовъ тако-го свойства, что еслии первой раздѣлился на второй, столькожъ въ частномъ вышши должно, когда третьей раздѣлился на четвертой. Откуда слѣдуетъ самое важное свойство геометрической пропорціи состоящее въ томъ,

у 2

что

что произведеніе изъ перваго и четвертаго членовъ равно произведенію изъ втораго и третьяго , или короче произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ.

464 .

Для доказательства сего свойства пусть будетъ геометрическая пропорція $a : b = c : d$, и слѣдовательно $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, умножь каждую изъ сихъ дробей на b , то получится $a = \frac{bc}{d}$, потомъ умножь еще съ обѣихъ сторонъ на d , и будетъ $ad = bc$; но ad есть произведеніе крайнихъ а bc произведеніе среднихъ членовъ , которыя оба равны между собою.

465

Когда же 4 числа a, b, c, d будутъ такого состоянія, что произведеніе крайнихъ ad равно произведенію среднихъ bc , то сїи числа будутъ въ пропорціи геометрической : ибо когда $ad = bc$, то раздѣли съ обѣихъ сторонъ на bd и получимся $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, и по сему $a : b = c : d$.

466.

466.

Четыре члена геометрической пропорции, яко $a : b = c : d$ переспавлены быть могутъ разными образами, такъ что они всегда будутъ пропорціональны, и все дѣло въ томъ, только состоятъ, чтобъ произведеніе крайнихъ равно было произведенію среднихъ членовъ, или чтобъ $ad = bc$, и по сему будетъ во первыхъ $b : a = d : c$ II) $a : c = b : d$; III) $d : b = c : a$ IV) $d : c = b : a$.

467.

Сверхъ сего можно еще вывести множество другихъ геометрическихъ пропорцій : ибо когда $a : b = c : d$, то во первыхъ будетъ первой со вторымъ $a + b$ къ первому a , такъ какъ третьей съ четвертымъ $c + d$ къ третьему c , т. е. $a + b : a = c + d : c$; потомъ такожде первой безъ второго $a - b$ къ первому a такъ третьей безъ четвертого $c - d$ къ третьему c , или $a - b : a = c - d : c$; ибо когда возмуться произведенія крайнихъ и среднихъ членовъ,

то будетъ $ac - bc = ac - ad$, потому что $ad = bc$, и $a - b : b = c - d : d$, гдѣ $ad - bd = bc - bd$, потому что $ad = bc$.

468.

Такіе изъ $a : b = c : d$ выведенные пропорціи могутъ вообще переставлены быть такъ: $ta + nb : pa + qb = tc + nd : pc + qd$, ибо произведеніе крайнихъ есть $trac + nrbc + tqad + nqbd$ или понеже $ad = bc$, то оно будетъ $trac + nrbc + tqbc + nqbd$, а произведеніе среднихъ $trac + tqbc + prad + nqbd$, или понеже $ad = bc$, то будетъ оно $trac + tqbc + nrbc + nqbd$, которое съ прежнимъ во всемъ сходно.

469.

Такимъ образомъ изъ данной какой нибудь пропорціи $6 : 3 = 10 : 5$ безконечное множество другихъ вывести можно, изъ коихъ нѣкоторые здѣсь предлагаемъ.

$$\begin{aligned} 3:6 &= 5:10, & 6:10 &= 3:5, & 9:6 &= 15:10, \\ 8:3 &= 5:5, & 9:15 &= 3:5, & 9:3 &= 15:5 \end{aligned}$$

470.

470.

Когда въ каждой геометрической пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то изъ данныхъ трехъ первыхъ членовъ можно найти четвертой; пусть будутъ 3 первые члена $24 : 15 = 40 : \dots$. Понеже произведеніе среднихъ членовъ въ семъ примѣрѣ есть 600, то четвертый членъ умноженной на первой ш. е. на 24 долженъ произвести также 600, слѣдовательно 600 на 24 раздѣлить надлежитъ, часное дастъ искомой четвертой членъ; по чему выйдетъ сія пропорція $24 : 15 = 40 : 25$, и еслили вообще первые три члена будутъ $a : b = c : -$, то поставь на мѣсто неизвѣстнаго четвертаго члена букву d , и тогда должно быть $ad = bc$, раздѣливъ теперь съ обѣихъ сторонъ на a получится $d = \frac{bc}{a}$; слѣдовательно четвертой членъ $= \frac{bc}{a}$, и находится, когда второй умножится на третей и произведеніе раздѣлится на первой.

471.

На семъ основано изящное арифметическое правило проймсе : ибо въ немъ изъ даныхъ трехъ чиселъ ищется такое четвертое, которое съ прочими въ геометрической пропорціи находится , такъ что первой содержица ко второму , какъ третьей къ четвертому.

472

При семъ нѣкоторыя особливья обстоятельство примѣчать надлежитъ , а именно: когда въ двухъ пропорціяхъ первое и третье члены одинаковы, какъ по въ сихъ $a : b = c : d$ и $a : f = c : g$, то будутъ также вторые и четвертые члены между собою пропорціональны, т. е. тогда будетъ $b : d = f : g$: ибо когда изъ первой слѣдуетъ $a : c = b : d$ а изъ другой $a : c = f : g$, то содержанія $b : d$ и $f : g$ между собою равны, потому что каждое изъ нихъ равно содержанію $a : c$, и по сему когда $5 : 100 = 2 : 40$ и $5 : 15 = 2 : 6$, то слѣдуетъ отсюда $100 : 40 = 15 : 6$.

473.

473.

Если же двѣ пропорціи будутъ такого состоянія, что средніе въ нихъ члены будутъ одинаки, тогда первые члены находясь въ обратномъ содержаніи четвертыхъ, а именно когда $a : b = c : d$ и $f : b = c : g$, то слѣдуетъ отсюда $a : f = g : d$. Пусть будетъ наприм. дана сія пропорція $24 : 8 = 9 : 3$ и $6 : 8 = 9 : 12$, то выйдетъ изъ того слѣдующая $24 : 6 = 12 : 3$, причина сему довольно видна, потому что первая пропорція даетъ $ad = bc$, а другая $fg = bc$, слѣдовательно $ad = fg$ и $a : f = g : d$ или $a : g = f : d$.

474.

Изъ данныхъ двухъ пропорцій можно всегда одну новую сдѣлать, когда первые, вторые, третьи, и четвертые члены помножатся между собою порознь. Такъ изъ сихъ пропорцій $a : b = c : d$ и $e : f = g : h$, ибо изъ первой $ad = bc$, а изъ второй $eh = fg$, то будетъ также $adeh = bcfg$; но $adeh$ есть произведеніе крайнихъ а

У 5

bcfg

$bcfg$ произведеніе среднихъ въ новой пропорціи , конторы между собою равны.

475.

Пусть будутъ даны сіи двѣ пропорціи $6 : 15 :: 10$ и $9 : 12 :: 15 : 20$, то составленіе оныхъ дастъ намъ слѣдующую пропорцію $6.9 : 4.12 :: 15.15 : 10.20$

т. е. $54 : 48 :: 225 : 200$

или $9 : 8 :: 9 : 8$

476.

Напоследокъ здѣсь еще примѣчать надлежитъ , что если два произведенія между собою равны какъ $ad = bc$, то изъ нихъ можно опять сдѣлать геометрическую пропорцію : ибо завсегда будетъ одинъ множитель перваго произведенія , къ одному втораго произведенія , такъ другой множитель втораго ко второму перваго произведенія , а именно : $a : c :: b : d$, когда на прим. $3.8 = 4.6$, то выходитъ отсюда сія пропорція $8 : 4 :: 6 : 3$ или $3 : 4 :: 6 : 8$; а когда $3.5 = 1.15$, то будетъ $3 : 15 :: 1 : 5$ или $5 : 1 :: 15 : 3$ или $3 : 1 :: 15 : 5$.

ГЛАВА



Г Л А В А IX.

Изъясненіе пропорцій.

477.

Сіе ученіе столь нужно въ общемъ житіи , что безъ него никогда почти обойтись не лзя ; ибо цѣны и товары всегда между собою пропорціональны , и при разныхъ родахъ денегъ главное дѣло состоятъ въ томъ , чтобы опредѣлить между ими содержаніе. И такъ не безнужно будемъ здѣсь изъяснить предложенныя наставленія и показать употребленіе оныхъ.

478.

Ежели потребуется сыскать содержаніе между двумя родами монетъ , на- прим. между люидоромъ и червонцомъ , то должно смотрѣть чего каждая изъ нихъ стоить въ какомъ нибудь претъ- емъ родѣ монеты , такъ въ Берли- нѣ люидоръ стоитъ 5 талеровъ и 8 гро- шей , а червонецъ 3 талера , то приве-
ди

ди только сіи деньги въ одинъ родъ монетъ, ш. е. или въ талеры; и тогда будетъ сія пропорція 1 люидоръ : 1 червонцу $= 5\frac{1}{3}$ талер. : 3 тал или $= 16 : 9$; или въ гроши, то выйдетъ сія пропорція: 1 люид. 1 черв $= 128 : 72 = 16 : 9$, и изъ такой пропорціи получишся содержаніе между люидоромъ и червонцомъ, а для равенства крайнихъ и среднихъ членовъ будущъ 9 люид. $= 16$ черв. Помощію сего сравненія каждую сумму люидоровъ обратишь въ червонцы, такъ когда спросишся, 1000 люидор. сколько дѣлаютъ червонцовъ? то дѣлается сіе тройное правило 9 люид. дѣлаютъ 16 черв. сколько 1000 люид.? отвѣтъ 1777 $\frac{2}{3}$ черв. естли же вопросъ будетъ: 1000 черв. сколько составятъ люидоровъ? тогда дѣлается сіе тройное правило: 16 черв. дѣлаютъ 9 люид. сколько 1000 черв.? имѣютъ 562 $\frac{1}{2}$ люидора.

479.

Здѣсь въ Петербургѣ цѣна червонца перемѣняется по вексельному курсу, по которому цѣна рубля въ Голландскихъ

скихъ штиверахъ опредѣляется , коихъ 105 дѣлаютъ червонецъ.

И пакъ когда курсъ въ 45 штиверовъ, то пропорція будетъ сія 1 рубль : 1 черв. $= 45 : 105 = 3 : 7$ и по сему сіе уравненіе 7 рубл. $= 3$ черв. Отсюда найши можно, сколько одинъ червонецъ дѣлаетъ рублей : ибо $3 \text{ черв.} : 7 \text{ рубл.} = 1 \text{ червон.}$ къ четвертому числу $2\frac{1}{2}$ рубля. Если же будетъ курсъ въ 50 штиверовъ , то имѣетъ мѣсто сія пропорція 1 рубл. : 1 черв. $= 50 : 105 = 10 : 21$; почему 21 рубль , составляетъ 10 червонцовъ , и отсюда 1 черв. $= 2\frac{1}{10}$ рубля. Когда же курсъ будетъ не болѣе 44 штиверовъ , то 1 рубль : 1 червон. $= 44 : 105$, и слѣд. 1 черв. $= 2\frac{12}{44}$ руб. $= 2$ рубл. $38\frac{7}{11}$ коп.

480.

По сему можно сравнивать монеты больше, нежели; двухъ родовъ, что особливо въ векселяхъ очень часто случается ; для примѣру положимъ , что нѣкто хочетъ отсюда въ Берлинъ переслать 1000 рублей , и желаетъ знать

СКОЛЬКО

сколько показанное число рублей составляет берлинск. червонцовъ ; а вѣдѣнный курсъ $\equiv 47\frac{1}{2}$ штиверовъ [т. е. одинъ рубль дѣлается $47\frac{1}{2}$ Голландскихъ штиверовъ] , потомъ 20 штиверовъ дѣлаютъ Голландской гуldenъ , а $2\frac{1}{2}$ Голландскихъ гуldenовъ, составляютъ Голландской спеціесталеръ ; курсъ же изъ Голландіи въ Берлинъ есть 142 , т. е. за 100 спеціесталеровъ платятъ въ Берлинъ 142 рейхсталера, и наконецъ 1 червонецъ стоитъ въ Берлинѣ 3 рейхсталера.

481.

Къ рѣшенію сего вопроса приступимъ мы по порядку начавъ съ штиверовъ, когда 1 руб. $\equiv 47\frac{1}{2}$ штив. : или 2 руб. $\equiv 95$ штивер. : то полагается
 2 руб. : 95 штив. $\equiv 1000$ рубл. : 47500 штивер. потомъ посылаю 20 штивер. : 1 гулд $\equiv 47500$ штив. къ 2375 гульденамъ.

Когда же $2\frac{1}{2}$ гульдена $\equiv 1$ спеціестал. т. е. 5 гульд. $\equiv 2$ спеціестал. то посылай 5 гулд. : 2 спеціестал. $\equiv 2375$ гулд. къ 950 спец.

спеціестал. Теперь приступимъ къ Берлинскимъ рейхсталерамъ : по курсу 142 на сто , будетъ 100 спеціесталер. : 142 рейхстал. = 950 спеціестал. : къ 1349 р. талер. наконецъ дошедъ до червонцовъ полагаемъ 3 р. тал. : 1 черв. = 1349 р. тал. къ 449 $\frac{2}{3}$ червонц.

482.

Для большаго изъясненія сей выкладки положимъ , что Берлинской банкиръ выдать сей суммы не хочетъ , подъ какимъ бы то видомъ ни было , а платитъ вексель съ вычетомъ 5 процентовъ , т. е. вмѣсто 105 даетъ только 100 , по для сей причины надлежитъ къ прежнему прибавить сіе тройное правило :

$$105 : 100 = 449\frac{2}{3} : 428\frac{16}{3} \text{ червонцамъ.}$$

483.

Къ сему хотя и требуется 6 выкладокъ по тройному правилу , однакожъ найдено средство сокращать сіе численіе помощію такъ называемаго цѣльнаго правила. Для изъясненія сего правила возьмемъ

возмемъ изъ б ти прежнихъ выкладокъ ,
каждые два передніе числа въ разсужденіе
и здѣсь предложимъ :

I) 2 руб. : 95 штив. II) 20 шт. : 1 гулд.
III) 5 Голл. гулд. : 2 сп. шал. IV) 100 сп. шал. : 142 р. шал.
V) 3 р. шал. : 1 черв. VI) 105 р. шал. : 100 р. шал.

Разсмотрѣвъ прежнее вычисленіе на-
ходимъ мы , что предписанную сумму
вездѣ множили на второй членъ , а на
первой дѣлили ; откуда видно , что то
же самое найдется , когда предложенная
сумма вдругъ на произведеніе изъ всѣхъ
вторыхъ членовъ умножится , и на про-
изведеніе изъ всѣхъ первыхъ раздѣлится ,
или здѣлается сіе одно тройное правило :
какъ произведеніе всѣхъ первыхъ членовъ
содержится къ произведенію всѣхъ вто-
рыхъ , такъ данное число рублей къ чи-
слу червонцовъ , копорые въ Берлинѣ
выдать должно.

484.

Сію выкладку еще больше сокра-
тить можно : ежели одинъ какой нибудь
изъ первыхъ членовъ равенъ одному изъ
вторыхъ

вторыхъ , то обѣихъ ихъ вымарать , или ежели они оба дѣлятся другъ на друга или на одно другое какое нибудь число , то частныя на ихъ мѣста ставить должно ; почему прежней примѣръ здѣланъ будетъ такъ :

2	:	88	19	
28	:	1		
8	:	2		
100	:	142		
3	:	1		1000 руб.
288 21	:	288 8		

$$6388 : 2698 = 1088 \text{ къ } 1000. 428 \frac{16}{88} \text{ черт.}$$

$$\begin{array}{r} 7) 26980 \\ \underline{49} \\ 9) 3854(2 \\ \underline{18} \\ 428(2 \end{array}$$

485.

При употребленіи сего цѣннаго правила наблюдать должно сей порядокъ: начинать съ самаго тогожъ роду монетъ, о которомъ спрашивается , и сравнивай его съ другимъ какимъ нибудь , съ котораго начинать слѣдующее содержаніе и съ нимъ сравнивай третьей родъ . такъ чшобъ каждое содержаніе съ того рода

Ф монетъ

монетѣ начиналось , которымъ прежде кончилось , и такимъ образомъ продолжай до тѣхъ поръ , пока придетъ до того рода монетъ , о которомъ рѣчь будетъ , и наконецъ причисляются еще и расходы.

486.

Къ большому изъясненію прилагаемъ еще нѣкоторые вопросы :

Когда червонцы въ Гамбургѣ однимъ проценпомъ больше нежели 2 рейхсталера banco [т. е. 50 черв. дѣлаютъ не 100 но 101 р. тал. B^o], а курсъ между Гамбургомъ и Кенигсбергомъ, 119 грошей Польскихъ [т. е. 1 р. тал B^o дѣлаетъ 119 грошей Польск.] спрашивается , сколько 1000 червонцовъ составятъ Польскихъ гульденовъ. [30 грошей Польск. дѣлаютъ 1 Польской гульденъ]

черв.	1	:	2 р. талера	B^o	1000 черв.
	100 (50)	:	101 р. талеръ	B^o	
	1	:	119 грош. польск.		
	30	:	1 гульд. польск.		

$$\begin{array}{rcl}
 12019 & = & 1000 : \text{къ искомѣ} \\
 \hline
 3) 12019000 & & 8012 \frac{2}{3} \text{ Червонц.} \\
 3) 40063 (1 & & \\
 8012 (3 & &
 \end{array}$$

487.

Ряди большаго сокращенія спраши-
 вающее число ставитъ можно надъ впо-
 рымъ рядомъ : ибо тогда произведе-
 ніе второй строки раздѣливъ на произведе-
 ніе первой получится желаемой отвѣтъ.
 Вопросъ : Лейпцигъ получаетъ изъ Ам-
 стердама червонцы , которые тамъ 5
 гульденовъ и 4 шпивер. ходячихъ денегъ
 стоятъ , [т. е. червонецъ стоитъ 104
 шпивера или 5 червонц. дѣлаютъ 26
 Голланд. гульденовъ, и когда А жѣди В°
 въ Амстердамѣ 5 процентовъ , [т. е.
 105 ходячихъ дѣлаютъ 100 В°] ; а век-
 сельной курсъ изъ Лейпцига въ Амстер-
 дамъ въ банкѣ $133\frac{1}{4}$ процентовъ [т. е. за
 100 р. шал. В° въ Лейпцигѣ платятъ
 $133\frac{1}{4}$ р. шал.] но 2 р. шал. Голланд. дѣ-
 лаютъ 5 Голланд. гульденовъ , сколько
 Ф 2 шалеровъ

талеровъ по симъ вексельнымъ курсамъ въ Лейпцигѣ заплашишь должно за 1000 червонцовъ.

		($\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2}$ черв.
черв. $\frac{1}{2}$:	26 Голл. ходяч. гульд.
$\frac{1}{2}$ (21)	:	4 ($\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2}$ Голл. гульд. B^o .
$\frac{1}{2}$:	$\frac{1}{2}$ талера Голл. B^o .
$\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$)	:	533 тал. въ Лейпц :

$$21 : \frac{55432}{2639} \frac{13}{27} \text{ таллеровъ}$$

или 2629 тал : и 15 гут. грош.



ГЛАВА X.

О сложныхъ содержаніяхъ.

488.

Два или больше содержаній складываются вмѣстѣ, когда какъ предвидущіе, такъ и послѣдующіе оныхъ члены между собою помножаются, и тогда говорится, что содержаніе между обѣими сими произведеніями есть сложенное изъ двухъ или больше данныхъ содержаній.

Такъ

Такъ изъ сихъ содержаній $a : b$, $c : d$,
 $e : f$ производимъ чрезъ составленіе сіе
 содержаніе $ace : bdf$.

489.

Понеже содержаніе не перемѣняетъ
 , когда его оба члена на одно число
 раздѣляются , то прежнее составленное
 содержаніе сокращить можно , ежели
 предвѣдущіе члены въ сравненіи съ по-
 слѣдующими уничтожатся или сокращаю-
 тся , какъ въ прежней главѣ показано.

По сему изъ слѣдующихъ данныхъ
 содержаній сложенное найдется такимъ
 образомъ:

данныя содержанія суть

$$xz (x) (2) : (5)zx$$

$$zx (1) : (x)zx$$

$$zx (xx) : (x)zx$$

$$2 : 5$$

Слѣдовательно получимся по сложе-
 нію сіе содержаніе $2 : 5$.

490.

Сїе самое вообще бываетъ и при
буквахъ , особливо сей случай достоинъ
примѣчанія гдѣ всегда предвидущей членъ
равенъ прежнему послѣдующему. Такъ
когда данныя содержанія будутъ

$$a : b$$

$$b : c$$

$$c : d$$

$$d : e$$

содержаніе $\frac{e : a \text{ то сложное изъ нихъ}}{1 : 1}$

491.

Для показанія пользы сего ученія
примѣчатъ надлежитъ , что два четыре-
угольные поля такое содержаніе между
собою имѣютъ , которое сложено изъ
содержанія ихъ длины и ширины.

Пусть будутъ наприм. два такіа
поля *A* и *B*, одного длина 500 футовъ , а
ширина 60 футовъ, другаго же длина 360
фут. а ширина 100 фут. то содержаніе
длины

длины есть 500 : 360 , ширины какъ
50 : 100 , чего ради будетъ.

$$500(5) : 360(6)$$

60 : 100 следовательно поле А

содержится къ полю В какъ 5 : 6

492

Другой примѣръ пусть будетъ поле
А въ длину 720 футовъ , а въ ширину
88 фут. , поле В въ длину 660 фут. ,
въ ширину 90 фут. , то надлежитъ слѣ-
дующія два содержанія сложить вмѣстѣ

$$\text{длины } 720(3)(4) : (3)(6)88$$

$$\text{ширины } 88(8)4 : 5(10)90$$

$$16 : 15 \text{ и сие есть}$$

содержаніе поля А къ полю В.

493

Для сравненія двухъ мѣстъ , или
пространствъ двухъ покоевъ между со-
бою надлежитъ знать , что содержаніе
ихъ сложено изъ трехъ I) изъ содержа-
нія длины, II) ширины, и напоследокъ III)
высоты. Пусть будетъ одинъ покой А,

Ф 4

кого

коего длина $\equiv 36$ фут., ширина $\equiv 16$ фут. и высота $\equiv 14$ фут.; а другого покоя В длина $\equiv 42$ фут., ширина $\equiv 24$ фут. и высота $\equiv 10$, то будуще при содержанія длины $\cancel{x}\cancel{y}(\cancel{z})2 : \cancel{y}(\cancel{x})\cancel{z}$

ширины $\cancel{x}\cancel{y}(z) : (x)\cancel{y}\cancel{z}$

высоты $\cancel{x}\cancel{y}(\cancel{z}) : (z)\cancel{x}\cancel{y}$

4 : 5 и такъ

пространство покоя А къ пространству покоя В содержился какъ 4 : 5.

494.

Ежели слагаемыя симъ образомъ содержанія равны между собою, то производяще изъ того умноженныя содержанія; то есть изъ двухъ равныхъ производяще удвоенное, или квадратное содержаніе, изъ трехъ равныхъ утроенное, или кубичное содержаніе, и такъ далѣе. По сему изъ содержаній $a : b$ и $a : b$ будетъ сложенное содержаніе $a^2 : b^2$, чего ради говорится, что квадраты находятся въ удвоенномъ содержаніи ихъ корней; а изъ содержанія $a : b$ трижды

взяшаго

взятаго выходитъ $a^3 : b^3$, и для того говоришся, что кубы находятся въ упрощенномъ содержаніи ихъ корней.

495.

Въ геометріи доказывается, что площади двухъ круговъ находятся въ удвоенномъ содержаніи ихъ поперешниковъ, т. е. они содержатся между собою такъ какъ квадраты ихъ поперешниковъ.

Пусть будетъ такая площадь круга A , котораго поперешникъ $= 45$ фут.; а другаго B поперешникъ $= 30$ фут., то будетъ она площадь содержаться къ сей, какъ $45.45 : 30.30$ или ихъ содержаніе, сложено изъ сихъ двухъ :

$$\begin{array}{ccc} \# \# (\#) 3 & : & \# \# (\#) 2 \\ \# \# (\#) 3 & : & \# \# (\#) 2 \end{array} \quad \text{слѣдов. сн.}$$

Площади содерж. какъ 9 : 4

496.

Доказывается также, что толщины двухъ шаровъ содержатся какъ кубы
Ф 5 ихъ

ихъ потерешниковъ : и такъ ежели поперешикъ одного шара A будетъ въ одинъ фунтъ , а другого B будетъ въ 2 фунта , то толщина шара A , къ толщинѣ шара B содержица какъ 1 : 8.

И по сему когда оба сїи шара изъ одной состоятъ машерїи , то шаръ B будетъ въ 8 разъ тяжелѣе шара A .

497.

По сему можно находить вѣсъ пушечныхъ ядеръ изъ ихъ поперешиниковъ , есѣли только одного какого нибудь ядра вѣсъ будетъ извѣстенъ. Пусть будетъ наприм. одно ядро A , 2 дюйма въ поперешикъ , и вѣсомъ въ 5 фунтовъ , то спрашивается о тяжести другого ядра , коего поперешикъ въ 8 дюймовъ , чего ради пропорція будетъ $2^3 : 8^3$ такъ 5 къ четвертому искомому 320 фунтамъ , т. е. къ вѣсу ядра B . Другаго ядра C , котораго поперешикъ = 15 дюймамъ , вѣсъ найдется такимъ образомъ $2^3 : 15^3 = 5$ фунт къ четвертому искомому $2109\frac{3}{8}$ фунт.

498.

Когда потребуе́тся содержаніе двухъ дробей какъ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, то можно его всегда изобразить цѣлыми числами; ибо когда только обѣ помянутые дроби помножатся на bd , то произойдетъ содержаніе $ad : bc$; которое прежнему равно, и для того сѣя пропорція справедлива $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$; и ежели содержаніе $ad : bc$ можно будетъ еще сократить, то содержаніе будетъ гораздо легче, какъ $\frac{15}{24} : \frac{25}{36}$ такъ $15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499.

Спрашивается какъ сѣи дроби $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ будутъ между собою содержаться? здѣсь видно, что $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, что словами изобразится такъ: двѣ дроби у копорыхъ числители равны 1, содержатся между собою обратно, какъ ихъ знаменатели: сѣе же самое бываетъ и при двухъ дробяхъ, у коихъ числители равны между собою: ибо $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, т. е. содержатся обратно, какъ ихъ знаменатели. Когда

же дроби имѣтъ будутъ одинакихъ знаменателей, какъ $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, то содержатся они какъ ихъ числители [въ прямомъ, а не въ обратномъ содержаніи], а именно какъ $a : b$. Посему $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = 2 : 1$ и $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ или $2 : 3$.

500.

При паденіи шѣлъ примѣчено, что въ одну секунду шѣло паденіемъ своимъ переходило 15 футовъ, въ 2 секунды перебѣгаетъ оно въ низъ 60 футовъ, въ 3, 135 фут. и изъ того заключили, что высоты содержатся между собою какъ квадраты временъ, и обратно времена содержатся между собою какъ квадратные корни высотъ.

Еслили кто спроситъ, во сколько времени упадетъ камень въ низъ съ высоты 2160 футовъ, то содержаніе будетъ $15 : 2160 = 1$, къ квадрату искомого времени; и такъ квадратъ искомого времени $= 144$, а самое время есть 12 секундъ.

501.

501.

Когда спрашивается сколь глубоко упасть можетъ камень въ одинъ часъ , т. е. въ 3600 секундъ ? то посылай какъ квадраты временъ , т. е. $1^2 : 3600^2$, такъ данная высота 15 фут. къ четвертому или искомой высотѣ.

И такъ $1 : 1296000 = 15$ къ иском.
 $15 \quad 194400000$ фут.

$$\begin{array}{r} 6480 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array}$$

Еслили мы щитаемъ будемъ 24000 фут. на одну нѣмецкую милю , то оная высота будетъ 8100 миль , которая будетъ больше нежели вся толщина земли.

502.

Подобныя обстоятельства наблюдаются при оцѣнкѣ дорогихъ камней , при которыхъ не на самой ихъ вѣсѣ , но на большее содержаніе смотрятъ. При алмазахъ наблюдается сѣе правило , что цѣна

цѣна ихъ содержитсяъ такъ какъ квадратъ вѣса , или содержаніе цѣны равно удвоенному содержанію вѣса. Вѣсъ, которымъ ихъ вѣсятъ называется каратъ и содержитъ 4 грана , по сему когда алмазъ вѣсомъ въ одинъ каратъ стоить 2 рубли , то алмазъ вѣсомъ во 100 каратовъ, столько разъ больше стоить будетъ , сколько квадратъ 100 больше квадрата 1 цы , почему тройное правило поставивъ должно такъ :

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ рубл.}$$

Или $1 : 10000 = 2 \text{ рубл.}$ къ четвертому искомому 20000 рубл. Въ Португаліи находится алмазъ вѣсомъ въ 1680 каратовъ , которому цѣна по вышенайденному найдется такъ.

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ рубл.} \dots \text{или } 1 : 2822400 \text{ къ четвертому } 5644800 \text{ рублей.}$$

503.

Достопамятной примѣръ сложныхъ содержаній даюмъ намъ почты, гдѣ почтовые деньги по сложенному содержанію

числа

числа лошадей и числа миль плащятъ ; такъ когда за одну лошадь на милю 8 грошей , или $\frac{1}{3}$ талера дается , то хочу знать сколько за 28 лошадей на $4\frac{1}{2}$ мили заплашишь должно ? Здѣсь ставится во первыхъ содержаніе лошадей 1 : 28, подѣсимъ пишется содержаніе миль 2 : 9 и оба содержанія складываются вмѣстѣ такъ 2 : 252 или короче 1 : 126, такъ $\frac{1}{3}$ талера , къ четвертому искомому 42 талерамъ.

Когда за 8 лошадей на 3 мили плащится червонецъ , то что должно дать за 30 лошадей на 4 мили ?

Выкладка будетъ слѣдующая:

$$\begin{array}{r} 8(2) : 5(12)22 \\ 2 \quad : \quad 2 \\ \hline 1 : 5 \equiv 1 \end{array} \quad \text{червон. къ четвертому}$$

искомому 5 червон. слѣдовательно заплашишь должно 5 червон.

504.

Сіе сложное содержаніе случается также и при работахъ , гдѣ плату по сложенному содержанію числа работниковъ и числа дней чинить должно.

Такъ

Такъ наприм. когда одному каменщику каждой день дается по 10 грошей, хочу знать, сколько заплашишь должно 24 каменщикамъ, которые 50 дней работали? выкладка будетъ такая

$$\begin{array}{r}
 1 : 24 \\
 1 : 50 \\
 \hline
 1 : 1200 = 10 \text{ грош.} : 500 \text{ р. тал.} \\
 \hline
 10 \\
 \hline
 3) \frac{12000}{4000} \text{ грош.} \\
 8) \frac{4000}{500} \text{ галер.}
 \end{array}$$

Понеже въ семъ примѣрѣ дано 5 членовъ, то правило сѣе въ ариѳметическихъ книгахъ называется *пятернымъ*.



ГЛАВА. XI.

О геометрическихъ прогрессіяхъ.

505.

Рядъ въ непрерывномъ содержаніи увеличивающихся или уменьшающихся чиселъ прогресс.

прогрессію геометрическою называется ;
а число , которое показывается во сколько
разъ каждой членъ больше своего предъи-
дущаго , именуется *знаменателемъ*. И
такъ когда первой членъ 1 , а знаменатель
2 , то прогрессія геометрическая есть слѣ-
дующая :

члены 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10
прогресс. 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 , 512
и проч.

указатели поставленные здѣсь наверху,
показываютъ къ которому мѣсту каждой
членъ принадлежитъ.

506.

Ежели вообще первой членъ $= a$, и
знаменатель b , то прогрессія геометри-
ческая будетъ :

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ... n
 $a , ab , ab^2 , ab^3 , ab^4 , ab^5 , ab^6 , ab^7 , \dots ab^{n-1}$

и такъ когда сія прогрессія состоятъ
будетъ изъ n членовъ по послѣдней ея
членъ $= ab^{n-1}$. Здѣсь примѣчать надле-
житъ , когда знаменатель будетъ больше
единицы , то члены всегда растутъ.

Если же $b=1$, то всѣ члены равны будутъ, и наконецъ ежели b будетъ меньше 1 цы, или дробь, то члены часъ отъ часу умаляются, такъ когда $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, то произойдетъ сѣя прогрессія $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ и проч.

5-7.

Здѣсь разсмотримъ еще надлежитъ слѣдующіе вещи.

- I) первой членъ, которой здѣсь a ,
- II) знаменатель, которой здѣсь b ,
- III.) число членовъ, которое положено $=n$
- IV.) послѣдней членъ, котор. нашелся $=ab^{n-1}$

Почему когда даны три первые вещи, то послѣдней членъ найдется, когда $(n-1)$ шя степень знаменателя, т. е. b^{n-1} на первой членъ помножится.

Ежели бы кто похотѣлъ знать 50 той членъ въ сей геометрической прогрессіи $1, 2, 4, 8$ и проч. то будетъ $a=1$, $b=2$, $n=50$, почему 50 той членъ $=2^{49}$; но $2^9=512$, то $2^{10}=1024$, сего квадратъ $2^{20}=1048576$, сего числа паки квадратъ 2^{40}

$2^{40} = 1099511627776$ и когда 2^{40} на 2^9
 $= 512$ умножишь, то получится 2^{49}
 $= 512 \cdot 1099511627776 = 562949953421312$
 508.

Здѣсь особливо спрашивается, ка-
 кимъ образомъ сумму всѣхъ членовъ та-
 кой прогрессіи находить должно, что
 мы здѣсь показать намѣрены такъ:
 пусть будетъ сперва состоятъ сія
 прогрессія изъ 10 членовъ 1. 2, 4, 8,
 16, 32, 64, 128; 256, 512.
 кою суммю изъяснимъ буквою f такъ
 что $f = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$
 $+ 256 + 512$, то сія прогрессія дважды
 взятая будетъ $2f = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
 $+ 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$, изъ сей
 вычши верхнюю прогрессію, въ оста-
 вѣ будетъ $f = 1024 - 1 = 1023$, и слѣдо-
 вательно искомая сумма будетъ $= 1023$.

509.

Возмемъ теперь въ сей же самой
 прогрессіи число членовъ неопредѣленное
 и положимъ $= n$, такъ что сумма бу-
 детъ $f = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots 2^4 + \dots + 2^{n-1}$,
 X 2 сию

сію умноживъ на 2 будетъ $2f = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \dots + 2^n$, изъ сей удвоенной вычти первую, то найдетсѣя $f = 2^n - 1$; по сей припчинѣ искомая сумма получишся, когда послѣдней членъ 2^{n-1} умножится на знаменателя прогрессіи 2, то произойдетъ 2^n , и изъ сего вычешъ 1 цу.

510.

Изъяснимъ се правило слѣдующими примѣрами, полагая вмѣсто n по порядку 1, 2, 3, 4, 5, и проч., какъ $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$ и проч.

511.

Здѣсь обыкновенно случается сей вопросъ: нѣкто продаетъ свою лошадь по числу подковныхъ гвоздей, которыхъ она имѣетъ 32, за первой гвоздь проситъ онъ 1 пфеннингъ, за другой 2, за третей 4, за четвертой 8, пфен. и всегда за слѣдующей въ двое больше, нежели за ближайшей передъ нимъ послѣдней.

лѣдней , спрашивается сколь дорого
лошадь спойти ?

Здѣсь надлежитъ геометрическую
прогрессию 1, 2, 4, 8, 16 и проч. продол-
жить даже до 32 го члена и всѣхъ ихъ
скасть сумму. Но понеже послѣдней членъ
 2^{31} и выше сего найдено, что $2^{29} = 1048576$, то умножь сіе число на $2^{10} = 1024$
будетъ $2^{39} = 1073741824$, потомъ помножь
еще сіе число на 2, и выдеши $2^{31} = 2147433648$, слѣдовательно сумма будетъ
равна сему числу дважды взятому и един-
ицею уменьшенному :

2) $\frac{4294967295}{2147483647} (1$ пфен. ; обрати ихъ въ гроши
6) $\frac{2147483647}{357913941} (1$ гроши и 3 пфен. дають тал.
3) $\frac{357913941}{119304647} (7$
8) $\frac{119304647}{14913080}$ слѣдов. талер. 21 грошъ и 3 пфен.
будетъ цѣна лошади.

512.

Пусть будетъ теперь знаменатель
 $= 3$ и прогрессія геометрическая 1, 3,
9, 27, 81, 243, 729, сихъ 7ми чле-
новъ сыскасть сумму ?

Х 3

Положи

Положи $ея = f$, то $f = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$, умножь сїю сумму на 3 будетъ $3f = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$, изъ сего вычти первую прогрессію, то получится $2f = 2187 - 1 = 2186$ удвоенная сумма, слѣдовательно самая сумма $= 1093$.

513.

Въ сей же самой прогрессіи, пусть будетъ число членовъ $= n$ и сумма $= f$, такъ что $f = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{n-1}$ помноживъ на 3 выдешъ $3f = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n$ изъ сей вычти первую, то всѣ члены нижней прогрессіи выключая послѣдней и всѣ члены верхней кромѣ первого въ сравненіи другъ съ другомъ уничтожатся и получится $2f = 3^n - 1$, слѣдовательно $f = \frac{3^n - 1}{2}$.

И такъ сумма сей геометрической прогрессіи найдется, когда послѣдней членъ умножится на 3, и изъ произведе-
нія вычтется 1, а остатокъ раздѣлится

на

на 2, какъ изъ слѣдующихъ примѣровъ видно: $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$; $1 + 3 + 9 = \frac{9 \cdot 3 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{27 \cdot 3 - 1}{2} = 40$; $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{81 \cdot 3 - 1}{2} = 121$.

514.

Положимъ теперь вообще первой членъ $= a$, знаменателя $= b$, число членовъ $= n$, и сумму ихъ $= f$, такъ что $f = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \dots + ab^{n-1}$ сіе помножь на b , выдешъ

$bf = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \dots + ab^n$
изъ сего вычти верхнюю прогрессію, будетъ

$(b-1)f = ab^n - a$, почему искомая сумма $f = \frac{ab^n - a}{b-1}$; слѣдовательно сумма каждой

геометрической прогрессіи найдется, когда послѣдней членъ умножится на знаменателя прогрессіи, и изъ произведенія вычтется первой членъ, а остатокъ раздѣлится на знаменателя уменьшеннаго на 1.

§15.

Дана геометрическая прогрессія состоящая изъ 7 членовъ , въ которой первой членъ $= 3$, а знаменатель $= 2$, то есть $a = 3$, $b = 2$ и $n = 7$, слѣдовательно послѣдней членъ $= 3 \cdot 2^6$, т. е. $3 \cdot 64 = 192$.

И самая прогрессія $= 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$.. Теперь помножь послѣдней членъ 192 на знаменателя 2 дастъ 384 , изъ сего вычти первой членъ , будетъ 381 ; и сей остатокъ раздѣли на $b - 1$, т. е. на 1 , будетъ 381 , которое число изъявляетъ сумму прогрессіи. -

§16.

Пусть будетъ дана еще геометрическая прогрессія изъ 6ти членовъ состоящая ; первой ея членъ $= 4$, а знаменатель $= \frac{3}{2}$, такъ что прогрессія будетъ $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$ сей послѣдней членъ $\frac{243}{8}$ умножь на знаменателя $\frac{3}{2}$ выдетъ $\frac{729}{16}$ отсюда вычти первой членъ 4 , въ остаткѣ будетъ $\frac{665}{16}$, которой должно раз-

раздѣливъ на $b-1 = \frac{1}{2}$ въ частномъ выдѣшъ искомая сумма прогрессіи $\frac{66\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 83\frac{1}{2}$.

517.

Когда знаменатель будетъ меньше 1 цы , то члены прогрессіи умахаются, и можно опредѣлить сумму такой безконечной прогрессіи.

Пусть будетъ наприм. первой членъ $= 1$, знаменатель $= \frac{1}{2}$ и сумма $= f$, такъ что $f = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ и такъ безконечно ; умноживъ оную на 2 , будетъ $2f = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ и проч. безконечно, изъ сей вычти верхнюю прогрессію , останется $f = 2$ искомая сумма безконечной прогрессіи.

518.

Пусть будетъ еще первой членъ $= 1$, знаменатель $= \frac{1}{3}$, сумма f ; такъ что $f = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ и такъ далѣе безконечно , помноживъ всю сію сумму на 3 будетъ $3f = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ и проч. безконечно , изъ сего вычти

X 5

верх-

верхней рядъ, останется $2f = 3$, слѣдовательно сумма $= 1\frac{1}{2}$.

§ 19.

Положимъ первой членъ $= 2$, знаменателя $= \frac{3}{4}$ сумму $= f$, такъ что $f = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ и проч. бесконечно, помножь сей рядъ на $\frac{4}{3}$, то будетъ $\frac{4}{3}f = \frac{8}{3} + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ и проч. бесконечно, изъ сего вычти верхней рядъ останется $\frac{1}{3}f = \frac{8}{3}$, слѣдовательно самая сумма будетъ точно 8.

§ 20.

Когда вообще первой членъ положится $= a$, знаменатель прогрессіи $= \frac{b}{c}$, такъ что сія дробь меньше 1 бы, и слѣдовательно b меньше нежели c , то можно сумму сей бесконечной прогрессіи сыскать слѣдующимъ образомъ: положи $f = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ и проч. бесконечно, умноживъ эдѣсь на $\frac{b}{c}$ будетъ $\frac{b}{c}f = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5}$ и проч. бесконечно; сей рядъ вычти изъ верхняго, то останется $(1 - \frac{b}{c})f = a$, слѣдовательно

но $f = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$, помножь теперь сверху и снизу на c , получится $f = \frac{ac}{c-b}$, почему сумма такой бесконечной прогрессии $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c-b}$.

И такъ сѣя сумма находится, когда первой членъ a на 1 знаменателемъ уменьшенную раздѣлится; или изъ 1 вычти знаменателя прогрессии и на остатокъ раздѣли первой членъ, частное покажетъ сумму прогрессии.

521.

Когда въ такой прогрессии знаки $+$ и $-$ перемежаются, то ея сумма подобнымъ образомъ найдется: ибо пусть будетъ $f = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ и проч. помножь сей рядъ на $\frac{b}{c}$, то будетъ $\frac{b}{c}f = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4}$ и проч. сложи сей послѣдней съ верхнимъ, то произойдетъ $(1 + \frac{b}{c})f = a$, откуда найдется искомая сумма $f = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$ или $\frac{ac}{c+b}$.

522.

522.

Примѣръ : пусть будетъ первой членъ $a = \frac{3}{5}$, знаменатель прогрессіи $= \frac{2}{5}$, то есѣ $b = 2$, $c = 5$, то ряда $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ и проч. сумма найдется такъ: вычпи знаменателя прогрессіи изъ 1, и на остатокъ $\frac{3}{5}$, раздѣли первой членъ $\frac{3}{5}$, искомая сумма будетъ $= 1$.

Когда же знаки $+$ и $-$ переменяются и предложенъ будетъ слѣдующей рядъ:

$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} +$ и проч., то его сумма будетъ $\frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{c}{b}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$.

523.

Для упражненія предлагается здѣсь безконечная прогрессія $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000}$ и проч., въ которой первой членъ $\frac{3}{10}$: знаменателя $\frac{1}{10}$ вычпи изъ единицы и на остатокъ $\frac{9}{10}$ раздѣли первый членъ, частное покажетъ искомую сумму $= \frac{1}{3}$.

когда

Когда возмется одинъ только членъ $\frac{3}{10}$, то не достаеиъ еще $\frac{1}{30}$; а когда возмущся 2 члена $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, то до $\frac{1}{3}$ не достаеиъ еще $\frac{1}{300}$ ипакъ далѣе.

524.

Ежели данъ будетъ безконечной рядъ $9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} +$ и проч., первой его членъ 9, а знаменатель $\frac{1}{10}$, чего ради вычпи сего знаменателя изъ 1, на остатокъ $\frac{9}{10}$ раздѣли первой членъ, частное даеиъ искомую сумму $= 10$. Здѣсь примѣчать надлежишъ, что сей рядъ представленъ быть можетъ десятичною дробью: то есть 9,9999999 и проч.

~~~~~

## Г Л А В Л XII.

О безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ.

525.

Выше сего видѣли мы, что при логарифмическихъ выкладкахъ мѣсто простыхъ дробей десятичныя употребляются, что и въ другихъ численіяхъ съ



не малою пользою дѣлается. И такъ здѣсь показашь надлежитъ, какимъ образомъ простая дробь въ десятичную превращается, и какъ обратнымъ образомъ величину десятичной дроби простою дробью изобразить должно.

## § 26.

Пусть будетъ вообще данная дробь  $\frac{a}{b}$ , которую въ десятичную дробь обратитъ надобно. Понеже сѣя дробь представляетъ частное произшедшее изъ дѣленія числителя  $a$  на знаменателя  $b$ , то вмѣсто  $a$  поставь сѣю формулу  $a$ , ооооооо, кошорая ни что иное какъ число  $a$  изображаетъ, потому что ни одной десяткой ни одной 100 и проч. части при ней не находишся. Сѣю формулу раздѣли теперь на число  $b$ , по обыкновенному правилу дѣленія, причемъ примѣчай только надлежитъ, чтобъ запятая отдѣляющая цѣлое число отъ дроби десятичной, была въ надлежащемъ мѣстѣ поставлена. Сѣе изъяснимъ мы слѣдующимъ примѣромъ :

Пусть

Пусть будетъ данная дробь  $\frac{1}{2}$ , то десятичное дѣленіе есть такое  $\frac{2 \overline{) 1,000000}}{0,500000} = \frac{1}{2}$ , отсюда видимъ мы, что  $\frac{1}{2}$  то же, что и 0,500000, или что и 0,5 : ибо десятичная дробь  $\frac{5}{10}$  столь же велика какъ  $\frac{1}{2}$ .

527.

Пусть будетъ дана еще дробь  $\frac{1}{3}$ , то десятичная будетъ сія  $\frac{3 \overline{) 1,000000}}{0,333333}$  и прощ.  $= \frac{1}{3}$ . Отсюда видно, что сія десятичная дробь равная  $\frac{1}{3}$  ни нигдѣ не кончится, но продолжается безконечно чрезъ 3 ; слѣд. всѣ сіи дроби  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{1}{1000000} +$  и прощ. безконечно вмѣстѣ взятыя дѣлаютъ точно  $\frac{1}{3}$ , какъ уже выше сего показано.

Вмѣсто  $\frac{2}{3}$  находится слѣдующая десятичная дробь, которая равнымъ образомъ продолжается безконечно  $\frac{3 \overline{) 2,000000}}{0,666666} = \frac{2}{3}$ , что также изъ прежняго явствуетъ: ибо сія дробь вдвое больше прежней.

528.

528.

Ежели дана будетъ дробь  $\frac{1}{4}$ , то десятичное дѣленіе будетъ  $\frac{4) 1,000000}{0,250000} = \frac{1}{4}$ , слѣдовательно  $\frac{1}{4}$  тоже что и 0,25000 или 0,25; попому что  $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ , равнымъ образомъ вмѣсто  $\frac{3}{4}$  получится десятичная дробь  $\frac{4) 3,000000}{0,750000} = \frac{3}{4}$  слѣд.  $\frac{3}{4} = 0,75$ , то есть  $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$ , которую дробь раздѣливъ на 25 въ частномъ получишь  $\frac{3}{4}$ .

Ежели бы понадобилось  $\frac{5}{4}$  превратить въ десятичную дробь, то было бы  $\frac{4) 5,000000}{1,250000} = \frac{5}{4}$  ибо она равна  $1 + \frac{25}{100}$ , то есть  $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ .

529.

Такимъ образомъ будетъ  $\frac{1}{5} = 0,2$ ;  $\frac{2}{5} = 0,4$ ;  $\frac{3}{5} = 0,6$ ;  $\frac{4}{5} = 0,8$ ;  $\frac{5}{5} = 1$ ;  $\frac{6}{5} = 1,2$ ; и пр.

Ежели знаменатель дроби будетъ 6, то найдется  $\frac{1}{6} = 0,166666$  и проч. тоже, что и 0,666666 — 0,5; а 0,666666  $= \frac{2}{3}$ , 0,5  $= \frac{1}{2}$ , слѣд. 0,166666  $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ .

Вмѣсто дроби  $\frac{2}{6}$  находится 0,333333 и проч.  $= \frac{1}{3}$ ; напротивъ того  $\frac{3}{6} = 0$ .

$\frac{3}{8} = 0,5000000 = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{5}{8} = 0,6250000$  и проч. то же что и  $0,3333333 + 0,5$  то есть  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ .

530.

Ежели знаменатель данной дроби будетъ 7, то произшедшіе отсюда десятичные дроби будутъ гораздо смѣшеннѣе. Какъ мѣсто  $\frac{1}{7}$  находится 0,142857 и проч. при чемъ примѣчать надлежитъ, что сіи 6 чиселъ 142857 въ слѣдующихъ дроби знакахъ всегда повтораются: и дабы показать, что сія десятичная дробь точно  $\frac{1}{7}$  составляетъ, то преврати ее въ сію геометрическую прогрессію, которой первой членъ  $= \frac{142857}{1000000}$ , а знаменатель прогрессіи  $= \frac{1}{1000000}$ , чего ради сумма ея будетъ  $\frac{142857}{1000000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000000}}$

сверху и снизу на 1000000, то сія сумма будетъ  $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ .

531.

Что найденная десятичная дробь, точно  $\frac{1}{7}$  дѣлаетъ, можетъ еще легче слѣдующимъ образомъ быть доказано. Положи мѣсто ея букву  $f$  такъ чтобъ

Ц

$f = 0,$

$f = 0,142857142857142857$  и пр.  
 то буд.  $10f = 1,42857142857142857$  и пр.  
 $100f = 14,2857142857142857$  и пр.  
 $1000f = 142,857142857142857$  и пр.  
 $10000f = 1428,57142857142857$  и пр.  
 $100000f = 14285,7142857142857$  и пр.  
 $1000000f = 142857,142857142857$  и пр.  
 Вычпи  $f = 0,142857142857$  и пр.

---

$$999999f = 142857$$

раздѣли теперь съ обѣихъ сторонъ на 999999, то получится  $f = \frac{142857}{999999}$  величина прежней десятичной дроби  $\frac{1}{7}$ .

532.

Равнымъ образомъ  $\frac{2}{7}$  превращается въ десятичную дробь:

$\frac{7)2,00000000}{0,2857142}$  и проч. Сіе ведетъ насъ какимъ образомъ величину прежней десятичной дроби названную  $s$ , еще легче сыскашь можно, ибо сія дробь вдвое больше прежней, и потому  $= 2f$ ; а когда мы нашли  $100f = 14,28571428571$  и пр. то отсюда вычпи  $2f = 0,28571428571$  и пр.

---

оста-

останется  $98f=14$

почему  $f=\frac{14}{98}=\frac{1}{7}$ .

$\frac{2}{7}=0,42857142857$  и пр. сіе по преж-  
жнему будетъ  $b=3f$ , и мы нашли

$10f=1,42857142857$  и проч.

то вычши  $3f=0,42857142857$  и проч.

---

останется  $7f=1$ , то есць  $f=\frac{1}{7}$ .

## 533

И такъ когда знаменатель данной  
дроби будетъ 7, то десятичная дробь  
продолжается бесконечно, и при томъ 6  
чиселъ въ ней всегда повторяются, че-  
му причину легко показать можно: ибо  
продолжая дѣленіе наконецъ въ остап-  
кѣ столькожъ вычши должно, какъ и съ  
начала, а въ остапкѣ не можетъ быть  
больше разныхъ чиселъ какъ 1, 2, 3, 4, 5, 6;  
и слѣдовательно по 6 томъ дѣленіи въ  
остапкѣ должны выходить опять тѣ же  
числа, какъ и съ начала; еспли же зна-  
менатель такого будетъ состоянія, что  
послѣ дѣленія на послѣдокъ ни чего не  
останется, то и сіе повтореніе чиселъ

въ томъ случаѣ уже мѣста имѣть не будутъ.

534.

Пусть будутъ знаменатель дроби 8, то найдутся слѣдующія десятичныя дроби  $\frac{1}{8}=0,125$ ,  $\frac{2}{8}=0,250$ ,  $\frac{3}{8}=0,375$ ;  $\frac{4}{8}=0,500$ ;  $\frac{5}{8}=0,625$ ,  $\frac{6}{8}=0,750$ ;  $\frac{7}{8}=0,875$  и проч.

535.

Если же знаменатель будетъ 9, то слѣдующія десятичныя дроби найдутся:  $\frac{1}{9}=0,111$  и пр.  $\frac{2}{9}=0,222$  и пр.  $\frac{3}{9}=0,333$  и пр. Когда знаменатель  $=10$ , то будутъ дроби  $\frac{1}{10}=0,100$ ;  $\frac{2}{10}=0,200$ ;  $\frac{3}{10}=0,300$ , какъ изъ природы самой вещи явствуетъ; подобнымъ образомъ будутъ  $\frac{1}{100}=0,01$ ;  $\frac{37}{100}=0,37$ ;  $\frac{256}{1000}=0,256$ ;  $\frac{24}{10000}=0,0024$ , что также само по себѣ ясно.

536.

Когда знаменатель дроби данъ будетъ 11, то десятичная дробь найдется  $\frac{1}{11}=0,09090909$  и проч. и если бы сей данной дроби спрашивалась величина, то положи  $ee=f$  и будутъ  $f=0,$

$\overline{0,09090909}$  ;  $10f = \overline{0,90909090}$  и проч.  
 $100f = \overline{9,0909090}$  и проч. отсюда выч-  
 ти  $f$ , и останется  $99f = 9$  ; и по сему  
 $f = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$  ;  $\frac{2}{11} = \overline{0,18181818}$  и проч.  $\frac{3}{11}$   
 $= \overline{0,27272727}$  и проч.  $\frac{6}{11} = \overline{0,54545454}$   
 и проч.

537.

Здѣсь особливо примѣчанія достой-  
 ны тѣ десятичныя дроби , въ которыхъ  
 нѣкоторыя числа всегда повторяются, и  
 такимъ порядкомъ идутъ бесконечно ; а  
 какъ способѣе находить величину сихъ  
 дробей , то будетъ показано.

Пусть сперва повторяемо будетъ од-  
 но только число напр.  $a$  , то будетъ  
 $f = \overline{0,aaaaaa}$  и проч.

Слѣдовательно  $10f = \overline{a,aaaaaa}$  и пр.

вычти  $f = \overline{0,aaaaaa}$

---

$9f = a$  и слѣд.  $f = \frac{a}{9}$

Когда же будутъ повторяться 2 чи-  
 сла какъ  $ab$  , то будетъ  $f = \overline{0,abababab}$   
 и проч. почему  $100f = \overline{ab,ababab}$  и пр.  
 отсюда вычти  $f$  , и останется  $99f = \overline{ab}$  ,  
 слѣд.  $f = \frac{ab}{99}$ .



Ежели повторяются 3 числа, какъ  $abc$ , то будешъ  $f=0$ ,  $abcabcabc$  и проч. и  $1000f=abc\ abc$ ,  $abc$ , изъ сего вычпи  $f$  останется  $999\ f=abc$  слѣд.  $f=\frac{abc}{999}$  и такъ далѣе.

538.

По сему какъ скоро такая десятичная дробь случится, величину ея легко опредѣлишь можно; напр. пусть будешъ данная дробь  $0.296296296$  и проч. то величина ея будешъ  $\frac{296}{999}$ , сию дробь раздѣли на 37 выдеши  $\frac{8}{27}$ .

Отсюда должна произойти предложенная десятичная дробь; а что бы сіе ясное показать, то положи  $27=9.3$ , и раздѣли 8 сперва на 9, и произшедшее посемъ частное на 3, какъ слѣдуешъ

$$\begin{array}{r} ) \quad 9 \overline{) 8,000000} \\ \underline{3) 0,888888} \end{array}$$

$0,296296$  и проч. которая есть данная десятичная дробь.

539.

Для примѣра дробь  $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$  преврати въ десятичную, что слѣдующимъ образомъ учиниши:

2)

$$\begin{array}{r}
 2) 1,00000000000000 \\
 3) 0,50000000000000 \\
 \hline
 4) 0,16666666666666 \\
 \hline
 5) 0,04166666666666 \\
 \hline
 6) 0,00833333333333 \\
 \hline
 7) 0,00138888888888 \\
 \hline
 8) 0,0001984126984126 \\
 \hline
 9) 0,00002480158730 \\
 \hline
 10) 0,00000275573192 \\
 \hline
 0,00000027557319.
 \end{array}$$



## Г Л А В А XIII.

О ВЫЧИСЛЕНІИ ИНТЕРЕССОВЪ.

540.

Интерессы какого нибудь капитала въ процентахъ представляются , говоря сколько за 100 ежегодно платится. Деньги выдаются обыкновенно за 5 процентовъ , такъ что на 100 талеровъ платится въ годъ 5 талеровъ интереса

сса. Отсюда видно какимъ образомъ вычислять должно интересы каждаго капитала по правилу тройному такъ:

100 дають, 5 что дастъ данной капиталъ. Пусть будетъ напр. капиталъ 860 рейхсгалеровъ, то годовой его интересъ найдется такъ:

$100 : 5 = 860$  къ искомому 43 талера.

$$100 \mid \underline{4300} \mid 43$$

541.

При вычисленіи сего простаго интереса медлить мы не будемъ, а станемъ разсуждать объ интересахъ съ интересовъ, гдѣ ежегодные интересы опять съ капиталомъ складываются, чрезъ что растетъ самой капиталъ. Въ семъ случаѣ спрашивается, сколько данной какой нибудь капиталъ по прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ увеличится? Понеже капиталъ ежегодно прирастаетъ, когда по 5 процентовъ изъ каждаго 100 талеровъ чрезъ годъ здѣлается 105, то сколь бы великъ капиталъ ни былъ, какъ великъ онъ будетъ по прошествіи года, найти можно. Пусть будетъ капиталъ

капиталъ  $a$ , то по прошествіи года оной  
найдется такъ, какъ  $100$  къ  $105 = a$   
къ искомому  $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$ , что написано мо-  
жетъ быть и такъ  $\frac{21}{20} \cdot a$ , или  $a + \frac{1}{20}a$ .

## 542.

Но когда къ настоящему капи-  
талу его 20тая часть приложився, то  
получится капиталъ на слѣдующей годъ;  
а когда къ сему опять 20тая его часть  
придастся, то выйдетъ капиталъ на  
второй годъ; къ сему приложивъ опять  
20тую его часть найдется капиталъ на  
3тей годъ и такъ далѣе. Отсюда легко  
видѣшь можно, какимъ образомъ капи-  
талъ ежегодно возрастаетъ, и сіе счи-  
сленіе такъ далеко продолжатъ можно,  
какъ желаешь.

## 543.

Пусть будетъ капиталъ 1000 та-  
леровъ, которой выданъ за 5 процентъвъ,  
и ежегодные отъ того интересы оная  
къ капиталу прикладываются. Понеже  
помянутое счисленіе скоро приведетъ  
насъ къ дробямъ, то представимъ ихъ

въ десятичныхъ дробяхъ , и не далѣе , какъ до тысячныхъ частей талера продолжать ихъ будемъ , ибо меньшіе его части здѣсь уже не чувствительны.

Данной капиталъ по прошествіи 1 года  
1050 талер.

|             |                        |
|-------------|------------------------|
|             | 52, 5                  |
| " " 2 " " " | <u>1102, 5</u>         |
|             | 55, 125                |
| " " 3 " " " | <u>1157, 625</u>       |
|             | 57, 881                |
| " " 4 " " " | <u>1215, 506</u>       |
|             | 60, 775                |
| " " 5 " " " | <u>1276, 281</u> и пр. |

544.

Симъ образомъ выкладку . продолжать можно на столько лѣтъ , сколько потребно будетъ ; но когда число лѣтъ будетъ гораздо велико, то и выкладка сія будетъ весьма пространна и трудна , которую однако сократить можно слѣдующимъ образомъ.

Пусть капиталъ будетъ  $= a$  ; и когда капиталъ 20 талеровъ чрезъ годъ дѣлается

лаетъ 21 талеръ, то капиталъ  $a$  чрезъ годъ возрастетъ до  $\frac{21}{20}a$ , потомъ въ слѣдующей годъ  $\frac{21}{20}^2 a = (\frac{21}{20})^2 a$ ; сей будетъ капиталъ по прошествіи двухъ лѣтъ, кошорой чрезъ годъ возрастетъ до  $(\frac{21}{20})^3 a$ , что показывать будетъ капиталъ по прошествіи 3хъ лѣтъ? По прошествіи 4хъ лѣтъ будетъ оной  $(\frac{21}{20})^4 a$ , послѣ 5ти лѣтъ  $(\frac{21}{20})^5 a$ ; послѣ 100 лѣтъ  $(\frac{21}{20})^{100} a$ ; и вообще по прошествіи неопредѣленнаго числа лѣтъ  $n$  будетъ оной  $(\frac{21}{20})^n a$ : по сему изъ даннаго какого нибудъ числа лѣтъ величину капитала найти можно.

545.

Попадающаяся здѣсь дробь  $\frac{21}{20}$  основана на томъ, что интересы считаются въ 5 процентовъ; а  $\frac{21}{20}$  то же, что и  $\frac{105}{100}$ . Ежели бы интересы считались въ 6 процентовъ, то бы капиталъ  $a$ , по прошествіи года былъ  $\frac{106}{100} a$ ; послѣ двухъ лѣтъ  $(\frac{106}{100})^2 a$ , и по прошествіи  $n$  лѣтъ будетъ  $(\frac{106}{100})^n a$ .

Ежели же бы интересы 4хъ не болѣе процентовъ были, то бы капиталъ  $a$  чрезъ  $n$  лѣтъ былъ  $(\frac{104}{100})^n a$ .

546.

546.

Ежели даны будутъ какъ капиталъ  $a$ , такъ и число лѣтъ, то сію формулу легко разрѣшить можно будетъ помощью логарифмовъ; ибо здѣсь ничего больше дѣлать не требуется, какъ только сыскать логарифмъ сей формулы, которая по 5 пи процентовъ будетъ  $(\frac{21}{20})^n a$ . Поелику сія формула есть произведеніе изъ  $(\frac{21}{20})^n$  на  $a$ , то логарифмъ ея будетъ  $= l(\frac{21}{20})^n + l.a$ , при томъ  $(\frac{21}{20})^n$  есть степень, то  $l(\frac{21}{20})^n = n. l(\frac{21}{20})$ ; слѣдов. логарифмъ искомага капитала  $= n. l(\frac{21}{20}) + l.a$ ; а логарифмъ дроби  $\frac{21}{20} = l.21 - l.20$ .

547.

Пусть будетъ капиталъ  $a = 1000$  талер.; спрашивается сколь великъ онъ будетъ по прошествіи 100 лѣтъ считая по 5 пи процентовъ.

Здѣсь  $n = 100$ , и логарифмъ сего искомага капитала  $= 100 \text{ лог. } \frac{21}{20} + \text{лог. } 1000$ , которой выкладывается такъ:

$$\begin{array}{r} \text{изъ лог. } 21 = 1,3222193 \\ \text{вычпи лог. } 20 = 1,3010300 \\ \hline \text{лог. } \frac{21}{20} = 0,0211893 \end{array}$$

по-

ПОМНОЖЬ НА 100

$$100 \text{ лог. } \frac{21}{20} = 2,1189300$$

$$\text{придай лог. } 1000 = 3,0000000$$

$$5,1189300 \text{ логар.}$$

искомаго капитала, и число его состоять будетъ изъ 6 фигуръ такихъ 131501 талеровъ.

548.

Капиталъ состоящей изъ 3452 рейхсталер. по 6 процентовъ, сколь великъ будетъ по прошествіи 64 лѣтъ?

Въ семъ примѣрѣ  $a = 3452$ ,  $n = 64$ , слѣд. логариѳмъ искомаго капитала  $= 64$  лог.  $\frac{53}{50} +$  лог. 3452, кошорой вычислился такъ:

$$\text{изъ лог. } 53 = 1,7242759$$

$$\text{вычпи лог. } 50 = 1,6989700$$

$$\text{лог. } \frac{53}{50} = 0,0253059$$

умножь на 64

$$64 \text{ лог. } \frac{53}{50} = 1,6195776$$

$$\text{придай лог. } 3452 = 3,5380793$$

$$\text{лог. искомаго капиш.} = 5,1576484$$

$$\text{слѣд. искомой капиталъ} = 143763 \text{ талеровъ.}$$

549.



549.

Ежели данное число лѣтъ будетъ очень велико, и понеже на него помножить должно логарифмъ дроби, логарифмы же таблицъ состоятъ не болѣе какъ изъ 7 знаковъ, то отсюда произойти можетъ чувствительная погрѣшность; по сей причинѣ логарифмъ дроби состоять долженъ изъ большаго числа фигуръ, какъ изъ слѣдующаго примѣра явствуется.

Капиталъ состоящей изъ одного рейхсталера по 5 процентовъ продолжается 500 лѣтъ, и ежегодные интересы всегда къ нему прикладываются, спрашивается, сколь великъ будетъ сей капиталъ по прошествіи 500 лѣтъ?

Въ семъ случаѣ  $a = 1$ ;  $n = 500$ , слѣдовательно логарифмъ искомаго капитала  $= 500 \text{ лог. } \frac{21}{20} + \text{лог. } 1$ , откуда произходитъ сѣя выкладка:

лог. 21 = 1, 322219294733919  
 вычти лог. 20 = 1, 301029995663981

лог.  $\frac{21}{20} = 0, 021189299069938$   
 помножь на 500 = 10, 594649534969000,  
 и сей есть логарифмъ искомаго капитала,

ко-

которой самъ будешъ  $= 39323200000$  талер.

550.

Ежели къ капиталу не только его интересы, но каждой годъ еще новая сумма денегъ  $= b$  прибавляться будетъ, то сей капиталъ ежегодно расти будетъ слѣдующимъ порядкомъ:

По прошествіи одного года

$$= \frac{21}{20} \cdot a + b$$

$$/// 2 /// \left( \frac{21}{20} \right)^2 \cdot a + \left( \frac{21}{20} \right) b + b$$

$$/// 3 /// \left( \frac{21}{20} \right)^3 \cdot a + \left( \frac{21}{20} \right)^2 b + \left( \frac{21}{20} \right) b + b$$

$$/// 4 /// \left( \frac{21}{20} \right)^4 \cdot a + \left( \frac{21}{20} \right)^3 b + \left( \frac{21}{20} \right)^2 b + \left( \frac{21}{20} \right) b + b$$

$$/// n /// \left( \frac{21}{20} \right)^n \cdot a + \left( \frac{21}{20} \right)^{n-1} b + \left( \frac{21}{20} \right)^{n-2} b + \dots + \left( \frac{21}{20} \right) b + b$$

Сей капиталъ состоитъ изъ двухъ частей, первая  $= \left( \frac{21}{20} \right)^n \cdot a$ , а другая есть рядъ обратно написанной  $b + \left( \frac{21}{20} \right) b + \left( \frac{21}{20} \right)^2 b + \left( \frac{21}{20} \right)^3 b + \left( \frac{21}{20} \right)^4 b + \dots + \left( \frac{21}{20} \right)^{n-1} b$  и означаетъ прогрессію геометрическую, которой знаменатель  $\frac{21}{20}$ , и сумма ея найдется такъ: умножь послѣдней членъ на знаменателя, выдешъ  $\left( \frac{21}{20} \right)^n b$ , изъ произведенія вычпи первой членъ,  $b$  остатокъ  $\left( \frac{21}{20} \right)^n b - b$  раздѣли на знаменателя уменьшеннаго единицею, то есть, на  $\frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$

и сумма прогрессіи  $= 20 \left( \frac{21}{20} \right)^n b - 20 b$ ,  
а искомой капиталъ будетъ  $\left( \frac{21}{20} \right)^n a + 20$   
 $\left( \frac{21}{20} \right)^n b - 20 b = \left( \frac{21}{20} \right)^n (a + 20 b) - 20 b$ .

551.

Для вычисленія сего должно первой членъ  
разсмотрѣть особливо и вычислить, что  
здѣлается, если найденъ его логарифмъ  
 $= n \log. \frac{21}{20} + \log. (a + 20 b)$ , то къ сему въ  
таблицахъ приищи надлежащіе числа, и по-  
лучився первой членъ, изъ котораго  
вычтя  $20 b$  останется искомой капиталъ.

552.

Вопросъ: нѣкто капиталу имѣетъ  
1000 талеровъ и отдастъ его по 5 про-  
центовъ, къ которому сверхъ интерес-  
совъ прикладываетъ еще онъ каждой годъ  
по 100 талеровъ, сколь великъ капиталъ  
сей будетъ по прошествіи 25 лѣтъ?

Здѣсь  $a = 1000$ ;  $b = 100$ ;  $n = 25$  и  
выкладка будетъ такая.

Логар.  $\frac{21}{20} = 0,0211892990$  (5  
умножь на 25 0,1059464950 (5  
25 лог.  $\frac{21}{20} = 0,5297324750$

ЛОГ:

$$\text{лог. } (a + 20b) = 3,4771213135$$

$$4,0068537885$$

Слѣдовательно первая часть  $= 10159$ ,  
и талер. изъ нее вычти  $20b = 2000$ ,  
останется капиталъ по прошествіи 25  
лѣтъ  $= 8159$ , и талеровъ

553.

Понеже капиталъ часъ отъ часу  
больше становится, и по прошествіи  
25 лѣтъ возрастетъ до  $8159\frac{1}{16}$  талер.:  
то можно спрашивать далѣе, сколько  
требуется лѣтъ, чтобъ капиталъ воз-  
росъ до 1000000 талеровъ?

Пусть сіе число лѣтъ будетъ  $= n$ , и  
когда  $a = 1000$   $b = 100$ , то по прошествіи  
и лѣтъ капиталъ будетъ  $(\frac{21}{20})^n$   $3000 - 2000$ ,  
что должно быть равно 1000000, оп-

куда происходитъ уравненіе  $3000 \cdot (\frac{21}{20})^n - 2000$   
 $= 1000000$ , придай съ обѣихъ сторонъ

2000 и будетъ  $3000 \cdot (\frac{21}{20})^n = 1002000$ , раз-  
дѣли съ обѣихъ сторонъ на 3000, то  
произойдетъ  $(\frac{21}{20})^n = \frac{1002000}{3000} = 334$ , сихъ чи-  
селъ возми логариѣмы; и  $\text{лог. } \frac{21}{20} = \text{лог. } 334$   
раздѣли съ обѣихъ сторонъ на  $\text{лог. } \frac{21}{20}$

ч

бу-

будетъ  $n = \frac{\log. 374}{\log. \frac{21}{20}}$  ; а  $\log. 334 = 2,5237465$

$\log. \frac{21}{20} = 0,0211892$ , по чему  
будетъ  $n = \frac{2,5237465}{0,0211892}$  умножь въ верху и въ  
низу на 1000000, выйдетъ  $n = \frac{25237465}{211892}$ , то  
есть 119 лѣтъ, 1 мѣсяцъ 7 дней ; и  
такъ по прошествіи сего времени дан-  
ной капиталъ возрастетъ до 1000000  
талеровъ.

554

Но ежели вмѣсто того, чтобъ  
ежегодно къ капиталу нѣчто прибавлять,  
отъ него отниматься будетъ нѣкая сум-  
ма для своего содержанія, и сія сумма  
положится  $b$ , то по 5 процентовъ вы-  
данной капиталъ  $a$  такимъ порядкомъ  
перемѣняться будетъ :

Данной капиталъ  $= a$

по прошествіи года  $\frac{21}{20}a - b$

„ „ 2 „ „  $(\frac{21}{20})^2 a - (\frac{21}{20})b - b$

„ „ 3 „ „  $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - (\frac{21}{20})b - b$

„ „  $n$  „ „  $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \dots - (\frac{21}{20})b - b$

555.

Сія формула состоитъ изъ двухъ  
частей, первая  $(\frac{21}{20})^n a$ , изъ которой вы-  
чища-

читается вторая часть, то есть сѣя геометрическая прогрессія обратно написанная

$b + \frac{21}{25}b + (\frac{21}{25})^2b + (\frac{21}{25})^3b + \dots + (\frac{21}{25})^{n-1}b$  сей прогрессіи выше сего найдена сумма  $20(\frac{21}{25})^nb - 20b$ , которую когда вычтешь изъ первой части,  $(\frac{21}{25})^na$ , остатокъ даешиъ искомоу капиталъ по прошесіи  $n$  лѣтъ; а именно:  $(\frac{21}{25})^na - 20(\frac{21}{25})^nb + 20b = (\frac{21}{25})^n(a - 20b) + 20b$ .

556.

Сію формулу можно бы потчасъ вывести изъ прежней: ибо шамъ ежегодно прибавлялось  $b$ , а теперь оно же ежегодно вычитается; слѣдовательно больше ничего не пребуется, какъ только въ прежней формулѣ мѣсто  $+b$  поставишь  $-b$ . Здѣсь особливо примѣчати надлежитъ, что ежели  $20b$  будишь больше нежели  $a$ , то первой членъ будишь отрицательной; слѣдовательно и капиталъ часъ отъ часу уменьшается, какъ то само по себѣ видно: ибо ежели отъ капитала больше отнимається будишь, нежели сколько интересы приносятъ,

Ч 2.

то

то непремѣнно должно ему каждой годѣ меньше становиться, и наконецъ уничтожиться, что мы примѣромъ изъяснимъ намѣрены.

557.

Нѣкто имѣетъ капиталъ во 100000 талерахъ состоящей, и отдалъ по 5 процентовъ, а на свое содержаніе беретъ онъ ежегодно 6000 талеровъ больше, нежели его интересы, кои только 5000 талеровъ дѣлаютъ; чего ради капиталъ сей часъ отъ часу уменьшается: спрашивается, во сколько лѣтъ совсѣмъ онъ уничтожится?

Мѣсто сего числа лѣтъ положи  $n$ , и когда  $a = 100000$  талер.  $b = 6000$ , то по прошествіи  $n$  лѣтъ капиталъ будетъ  $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$  или  $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ , слѣдовательно капиталъ уничтожится когда  $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$  возрастетъ до 120000 или когда  $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$ ; раздѣли на 20000, то будетъ  $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$  возьми сихъ чиселъ логарифмы, то  $n \log. \frac{21}{20} = \log. 6$ , раздѣли на  $\log. \frac{21}{20}$ , найдется

$$n = \frac{\log. 6}{\log. 21} = \frac{0,7781513}{0,0211892} \text{ или } n = \frac{7781513}{211892}, \text{ слѣд. } n=36$$

годамъ , 8 мѣсяцъ . 22 днямъ , и по прошествіи сего времени данной капиталъ совсѣмъ уничтожится.

558.

Здѣсь должно еще показать , ка-  
кимъ образомъ по сему основанію инте-  
рессы на меньшее годъ время вычислять  
надлежитъ . Къ сему служитъ прежде-  
найденная формула , что капиталъ  $a$  по  
пяти процентовъ по прошествіи  $n$  лѣтъ  
возрастаетъ до  $(\frac{21}{20})^n a$  : ибо ежели время  
короче года будетъ , то показатель  $n$  бу-  
детъ дробь , а выкладка такъ какъ и  
прежде здѣлана быть можетъ помощію  
логарифмовъ . Ежели капиталъ станешь  
искать по прошествіи одного дня , то  
положи  $n = \frac{1}{365}$  , для двухъ дней будетъ  
 $n = \frac{2}{365}$  и такъ далѣе.

559.

Пусть будетъ капиталъ  $a = 100000$   
талеровъ по 5 процентовъ , спрашивается  
сколь великъ онъ будетъ по проше-  
ствіи 8 дней ?



Здѣсь  $a=100000$  ,  $n=\frac{8}{365}$  , слѣд. капиталъ будетъ  $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} 100000$  ; сего логариѣмъ  $= \log. (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \log. 100000 = \frac{8}{365} \log. \frac{21}{20} + \log. 100000$  ; а  $\log. \frac{21}{20} = 0.0211892$  , умножь его на  $\frac{8}{365}$  и будетъ  $0,0004644$  , къ сему приложи логариѣмъ  $100000 = 5,0000000$  , и будетъ  $5,0004644$  логариѣмъ искомага капитала , которой будетъ  $100107$  ; слѣдовательно данной капиталъ  $100000$  талеровъ по прошествіи 8 дней возрастетъ до  $100107$  , такъ что въ первые 8 дней интереса сей капиталъ принесетъ  $107$  талеровъ.

560.

Сюда принадлежатъ еще другіе вопросы , въ которыхъ ищется , ежели нѣкая сумма денегъ съ нѣсколькихъ лѣтъ начала упадать , сколько она теперь дѣлаетъ ? здѣсь надобно смотрѣть что когда 20 талеровъ чрезъ годъ дѣлаютъ 21 , то теперь 21 талеръ , которые чрезъ годъ заплатить должно , дѣлаетъ 20 , а ежели по прошествіи одного года упавшей

упадшей капиталъ положится  $=a$ , то оной' будетъ  $\frac{20}{21}a$ , и чтобы сыскать сколько капиталъ  $a$ , которой нѣкое извѣстное время упадетъ, за годъ прежде стоялъ, то умножь его на  $\frac{20}{21}$ , за 2 года прежде оной' будетъ  $(\frac{20}{21})^2a$ ; за 3 года  $(\frac{20}{21})^3a$ , и вообще за  $n$  лѣтъ величина онаго  $(\frac{20}{21})^na$ .

## 561.

Нѣкто пользуется годовыми приходами во 100 талерахъ состоящими 5 лѣтъ, и желаетъ теперь ихъ продать за наличные деньги по 5 процентовъ; спрашивается сколько онъ за нихъ получитъ?

|                                 |   |   |   |   |          |
|---------------------------------|---|---|---|---|----------|
| За 100 талеровъ, которые упа-   |   |   |   |   |          |
| даютъ послѣ 1 года получатъ онъ |   |   |   |   |          |
|                                 |   |   |   |   | 95, 239  |
| "                               | " | 2 | " | " | 90, 704  |
| "                               | " | 3 | " | " | 86, 385  |
| "                               | " | 4 | " | " | 82, 272  |
| "                               | " | 5 | " | " | 78, 355  |
| <hr/>                           |   |   |   |   |          |
|                                 | 5 | , | , | " | "        |
|                                 |   |   |   |   | 432, 955 |

Слѣдовательно за сѣи приходы больше не можетъ онъ пребовать какъ 432, 955 талеровъ.

562.

Ежели бы какіе доходы гораздо большее число лѣтъ продолжались, то бы такая выкладка была очень скучна, которую однако облегчить можно симъ образомъ. Пусть будетъ годовой приходъ  $a$ , которой уже сей часъ начинается, и продолжается  $n$  лѣтъ, то оныя будущія шеперь

$$a + \frac{20}{21}a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a + \dots + \left(\frac{20}{21}\right)^{n-1} a$$

и сія есть геометрическая прогрессія, которой сумму найти должно. Чего ради послѣдней членъ умножь на знаменателя прогрессіи, выдешъ  $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$ , изъ сего вычти первой членъ, останется  $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$ , сей остатокъ раздѣли на знаменателя уменьшеннаго единицею, то есть на  $-\frac{1}{21}$ , или что все равно, помножь на  $-21$ , слѣд. искомая сумма будетъ  $-21 \left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$ , то есть  $: 21a - 21 \left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$ ; въ сей формулѣ послѣдней членъ, которой вычитать надлежитъ изъ перваго, можно легко найти помощію логарифмовъ.

Конецъ третей части о содержаніи  
и пропорціи.